Унифицированная форма
№ СМК.11.ДП.ОР.237.002-16
от12.04.2016г.№ 26-п

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ГАЗПРОМ ТЕХНИКУМ НОВЫЙ УРЕНГОЙ»

Сборник методических указаний

для студентов
по выполнению практических работ
по учебной дисциплине
ПД.01 «Математика (включая алгебру и начала
математического анализа, геометрию)»
общеобразовательного цикла
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальностям технического профиля

Новый Уренгой 2018

Методические указания для выполнения практических работ разработаны в соответствии рабочей программой учебной дисциплины *«Математика (включая алгебру и начала математического анализа, геометрию)»* на основе ФГОС СПО по специальностям технического профиля и содержат требования по подготовке, выполнению и оформлению результатов практических работ.

Методические указания по выполнению практических работ адресованы студентам очной формы обучения.

РАЗРАБОТЧИКИ:
Надежда Юрьевна Автандилова, преподаватель высшей квалификационной категории
Лариса Ивановна Гаврилова, преподаватель

Рассмотрены на заседании ЦКМиОЕНД
и рекомендованы к применению
Протокол № 1 от « 14 » сентября 2018 г.
Председатель ЦКМиОЕНД
__________ О.Б. Алгазина
Зарегистрированы в реестре банка программной, оценочной и учебно-методической документации
Регистрационный номер 459. МУ(ПР).ТП.ПД.01. ЦКМиОЕНД. 002-18

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемый студент!

Методические указания по дисциплине «Математика» для выполнения практических работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к практическим работам, правильного составления отчетов.

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель занятия, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Все задания к практической работе Вы должны выполнять в соответствии с инструкцией, анализировать полученные в ходе занятия результаты по приведенной методике.

Отчет о практической работе Вы должны выполнить по приведенному алгоритму, опираясь на образец.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения допуска к экзамену, поэтому в случае отсутствия на занятии по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Выполнение практических работ направлено на достижение следующих **целей**:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний;
- формирование умений, получение первоначального практического опыта по выполнению профессиональных задач в соответствии с требованиями к результатам освоения дисциплины. Освоенные на практических занятиях умения в совокупности с усвоенными знаниями и полученным практическим опытом при прохождении учебной и производственной практики формируют профессиональные компетенции;

- совершенствование умений применять полученные знания на практике, реализация единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как творческая инициатива, самостоятельность, ответственность, способность работать в команде и брать на себя ответственность за работу всех членов команды, способность к саморазвитию и самореализации, которые соответствуют общим компетенциям, перечисленным в ФГОС СПО.

Предусмотрено проведение 25 практических работ для очной формы обучения.

Образовательные результаты, подлежащие проверке в ходе выполнения практических работ–

в совокупности практические работы по учебной дисциплине «Математика» охватывают весь круг умений и знаний, перечисленных в рабочей программе УД «Математика» технического профиля. Выполнение практических работ направлено на формирование общих компетенций, предусмотренных во ФГОС СПО по специальностям21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, 21.02.03 Сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ, 15.02.07Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
ОК8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать
повышение квалификации.
ОК9. Ориентироваться в условиях частной смены технологий в профессиональной деятельности.

1 Требования к оформлению отчетов по практическим работам

При выполнении практических работ необходимо воспользоваться: методическим указанием по выполнению практических работ.

Форма и условия контроля и оценивания практических работ:
- отчет в тетрадях для практических работ,
- защита работы в письменной форме по контрольным вопросам, приведенным в методических указаниях.

2 Критерии оценки практической работы

Практические работы оцениваются по пятибалльной системе.

«Отлично»

1 Проявляются организационно-трудовые умения, общие компетенции.
2В отчете отсутствуют ошибки при описании теории, формулирует собственные, самостоятельные, обоснованные, аргументированные суждения, представляет полные и развернутые ответы на дополнительные вопросы.

«Хорошо»

1 В ходе выполнения работы допущено два-три недочета или не более одной ошибки и одного недочета.

2 В отчёте допущены неточности, выводы сделаны неполные.

«Удовлетворительно»

1 Работа выполняется правильно не менее, чем на половину, однако объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы по основным, принципиально важным задачам работы.

2 Работа поначалу проведена с помощью преподавателя.

3 Допускает грубую ошибку (в объяснении, в оформлении работы),которая исправляется по требованию преподавателя.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий. Время проведения дополнительных занятий можно узнать в открытом информационном пространстве Техникума.

Желаем Вам успехов!!!

3 Практические работы

3.1 Практическая работа № 1

«Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнение числовых выражений»

Учебная цель:

обобщить и систематизировать знания о действительных числах, и уметь работать с ними.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Множество это совокупность каких-либо объектов, предметов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, входящие в данное множество, называются элементами этого множества. Множества обозначают латинскими буквами:$A, B, C, D, \ldots$, элементы множества – $a, b, c, d, \ldots$ Тот факт, что элементa принадлежит множеству A, записывают следующим образом: $a \in A$. Если элемент bне входит во множество A, то это записывается так: $b \overline{\in} A$.

Далее будем рассматривать числовые множества, то есть множества элементами, которых являются числа.

1) *Множество натуральных чисел*: 1, 2, 3, 4, 5,… - $\boldsymbol{N}$.

При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

2) *Множество целых чисел*: 0, ± 1, ± 2, ± 3, … - $\boldsymbol{Z}$.

При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

3) Чтобы сделать выполнимой операцию деления на любое число, *не равное нулю*, необходимо к множеству всех целых чисел присоединить множество всех положительных и отрицательных дробей. В результате получается множество *рациональных чисел*$\boldsymbol{Q}$, то есть числа вида $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{m}$– целое число ($\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}$), $\boldsymbol{n}$– натуральное число ($\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$).

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Бесконечную десятичную дробь 0,3333… называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 – ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333… коротко записывают так: 0,(3); читается: «Ноль целых и три в периоде».

Периодическая дробь– это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.

Периодическая дробь– это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.

Например, 1,057373…=1,05(73).Читается: «1 целая, 5 сотых и 73 в периоде».

Запишем рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби:

натуральное число 25 = 25,00…= 25,(0);

целое число -7 = -7,00…= -7,(0);(пользуемся алгоритмом деления уголком).

Теорема 1.1. Каждое рациональное число представляется периодической десятичной дробью.

Теорема 1.2. Каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Правило обращения периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Периодическая дробь вида $0,(b_1 b_2 \dots b_n)$равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть период, а знаменатель – число, состоящее из цифр 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде:

$$0,(b_1 b_2 \dots b_n) = \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ раз}}}.$$

Смешанная периодическая десятичная дробь $0,a_1 a_2 \dots a_k(b_1 b_2 \dots b_n)$ равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть разность между числом, стоящим после запятой, и числом, стоящим в периоде, а знаменатель есть число, состоящее из цифр 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр между3 запятой и периодом:

$$0,a_1 a_2 \dots a_k(b_1 b_2 \dots b_n) = \frac{a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ раз}} \underbrace{00..0}_{k \text{ раз}}}.$$

4) Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001…, в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 – два нуля и, вообще, после n– й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом.*

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, 0, -π, -5/2.

Множество всех рациональных и иррациональных чисел составляет множество действительным чисел ***R***.

Запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий, называется *числовым выражением.*

Например, 20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95).

Значение числового выражения получают в определенном порядке действий.

Процент(%) – это одна сотая часть какого-либо числа.

$$1\%=\frac{1}{100}=0{,}01, \qquad p\%=\frac{p}{100}.$$

Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности

Решение практических задач, как правило, связано с числовыми значениями величин. Эти значения получаются либо в результате измерения, либо в результате вычислений. В большинстве случаев значения величин, которыми приходится оперировать, являются приближенными.

Пусть ***X***- точное значение некоторой величины, а *x* - наилучшее из известных ее приближенных значений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения *x* определяется разностью ***X***-*x*. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину:

$$e_x = |X - x| \qquad 1.1$$

Приближенные числа изображаются, как правило, в виде конечных десятичных дробей.

Величина e_x, называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения *x*, в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно точное значение *X*.

Вместе с тем, на практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое (по возможности наименьшее) число Δx, для которого справедливо неравенство

$$\Delta x \geq |X - x| \qquad 1.2$$

Число Δx в этом случае называется *предельной абсолютной погрешностью,* или *границей абсолютной погрешности приближения x.*

Таким образом, предельная абсолютная погрешность приближенного числа x - это всякое число Δx, не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

Неравенство (1.2) позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta\text{x} \leq X \leq x + \Delta\text{x}, \qquad 1.3$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ=$x - \Delta$x) и верхней границы (ВГ=$x + \Delta$x) приближенияx.

Во многих случаях значения границы абсолютной ошибки $\Delta x,$так же как и наилучшие значения приближения x**,** получаются на практике в результате измерений. Пусть, например, в результате повторных измерений одной и той же величины x получены значения: 5,2; 5,3; 5,4; 5,3. В этом случае естественно принять за наилучшее приближение измеряемой величины среднее значение x=5,3. Очевидно также, что граничными значениями величины x в данном случае будут $НГ_X$= 5,2, $ВГ_X$ = 5,4, а граница абсолютной погрешности x может быть определена как половина длины интервала, образуемого граничными значениями $НГ_X$ и $ВГ_X$, т.е. $x = \frac{5{,}4 - 5{,}2}{2} = 0{,}1.$

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения характеризуется величиной *относительной погрешности,* которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X(когда оно неизвестно, то к модулю приближения x).

Предельной относительной погрешностью (или *границей относительной погрешности*) $\boldsymbol{\delta x}$ приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x:$\boldsymbol{\delta x}=\frac{\Delta \text{x}}{|\text{x}|}$1.4

Формула (1.4) позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:Δx=|x| $\cdot\boldsymbol{\delta x}$………………………………….1.5

Относительную погрешность выражают обычно в процентах.

Пример 1.1. Определим предельные погрешности числа x=3,14 как приближенного значения π. Так как π=3,1415926…., то

$$\Delta = |\pi - 3{,}14| < 0{,}0015927 < 0{,}0016 = \Delta x$$

по формуле связи получаем $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|} = \dfrac{0{,}0016}{3{,}14} < 0{,}00051$

Таким образом $\Delta x = 0{,}0016; \delta x = 0{,}00051 = 0{,}51\%$.

Верные и значащие цифры. Запись приближенных значений

Цифра числа называется *верной* (*в широком смысле*), если ее абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Например. X=6,328 ΔX=0,0007 ΔX<0,001 следовательно цифра 8-верная

Пример 1.2.

а). Пусть 0 = 2,91385, $\Delta a = 0.0097$. В числе a верны в широком смысле цифры 2, 9, 1.

б) Возьмем в качестве приближения к числу π = 3,141592... число π' = 3,142. Тогда $|\pi - \pi'| < 0.001 = \Delta\pi'$, (Рисунок 1.1) откуда следует, что в приближенном значении π' = 3,142 все цифры являются верными.

в) Вычислим на 8-разрядном МК частное точных чисел 3,2 и 2,3, получим ответ: 1,3913043. Ответ содержит ошибку, поскольку разрядная сетка МК

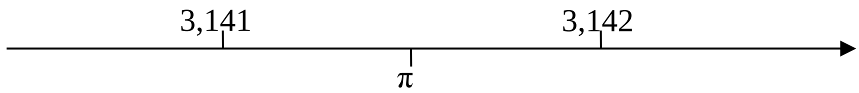


Рисунок 1.1 - Приближение числа π

не вместила всех цифр результата и все разряды, начиная с восьмого были опущены. (В том, что ответ неточен, легко убедиться, проверив деление умножением: 1,3913043 2,3 = 3,9999998.) Не зная истинного значения допущенной ошибки, вычислитель в подобной ситуации всегда может быть уверен, что ее величина не превышает единицы самого младшего из изображенных на индикаторе разряда результата. Следовательно, в полученном результате все цифры верны.

Первая отброшенная (неверная) цифра часто называется *сомнительной*. Говорят, что приближенное данное записано правильно, если в его записи все цифры верные. Если число записано правильно, то по одной только его записи в виде десятичной дроби можно судить о точности этого числа. Пусть, например, записано приближенное число a = 16,784, в котором все цифры верны. Из того, что верна последняя цифра 4, которая стоит в разряде тысячных, следует, что абсолютная погрешность значения a не превышает 0,001. Это значит, что можно принять $\Delta a = 0.001$, т.е. а = 16,784±0,001.

Очевидно, что правильная запись приближенных данных не только допускает, но и обязывает выписывать нули в последних разрядах, если эти нули являются выражением верных цифр. Например, в записи b=109,070 нуль в конце означает, что цифра в разряде тысячных верна и она равна нулю. Предельной абсолютной погрешностью значенияb, как следует из записи, можно считать $\Delta b = 0{,}001.$. Для сравнения можно заметить, что значение c = 109,07 является менее точным, так как из его записи приходится принять, что $\Delta c = 0{,}01.$

Значащими цифрами в записи числа называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они расположены между значащими цифрами или стоят в конце для выражения верных знаков.

Например, в записи числа 0,2409 четыре значащие цифры; 24,09 - четыре значащие цифры; 100,700 - шесть значащих цифр.

Выдача числовых значений в ЭВМ, как правило, устроена таким образом, что нули в конце записи числа, даже если они верные, не сообщаются. Это означает, что если, например, ЭВМ показывает результат 247,064 и в то же время известно, что в этом результате верными должны быть восемь значащих цифр, то полученный ответ следует дополнить нулями: 247,06400.В процессе вычислений часто происходит округление чисел, т.е. замена чисел их значениями с меньшим количеством значащих цифр. При округлении возникает погрешность, называемая погрешностью округления. Пусть x -данное число, а x_1 - результат округления. Погрешность округления определяется как модуль разности прежнего и нового значений числа:

$$\Delta_{окр} = |x - x_1|. \qquad 1.6$$

В отдельных случаях вместо $\Delta_{окр}$ приходится использовать его верхнюю оценку.

Выполним на 8-разрядном МК действие 1/6. На индикаторе высветится число 0,1666666. Произошло автоматическое округление бесконечной десятичной дроби 0,1(6) до числа разрядов, вмещающихся в регистре МК. При этом можно принять $\Delta_{окр} = 0,7*10^{-7}$.

Цифра числа называется верной в *строгом смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Правила записи приближенных чисел

Приближенные числа записываются в форме $x \pm \Delta x$. Запись $X = x \pm \Delta x$ означает, что неизвестная величина X удовлетворяет следующим неравенствам:

$$x-\Delta x <= X <= x+\Delta x$$

При этом погрешность Δx рекомендуется подбирать так, чтобы

а) в записи Δx было не более 1-2 значащих цифр;

б) младшие разряды в записи чисел x и Δx соответствовали друг другу.

Например, 23,4±0,2 ; 2,730±0,017 ; -6,97±0,10.

Приближенное число может быть записано без явного указания его предельной абсолютной погрешности. В этом случае в его записи (мантиссе) должны присутствовать только верные цифры (в широком смысле, если не сказано обратное). Тогда по самой записи числа можно судить о его точности.

Пример 1.3. Если в числе A=5,83 все цифры верны в строгом смысле, то ΔA=0,005. Запись B=3,2 подразумевает, что ΔB=0,1. А по записи C=3,200 мы можем заключить, что ΔC=0,001. Таким образом, записи 3,2 и 3,200 в теории приближенных вычислений означают не одно и то же.

Цифры в записи приближенного числа, о которых нам неизвестно, верны они или нет, называются *сомнительными.* Сомнительные цифры (одну-две) оставляют в записи чисел промежуточных результатов для сохранения точности вычислений. В окончательном результате сомнительные цифры отбрасываются.

Например, если A=3,7**4**12±0,002, то цифра 4 верная (ΔA=0,002<**0,01**), следовательно, предыдущие цифры 7 и 3 также верны. A=3,74**1**2±0,002цифра 1 – сомнительная, так как (ΔA=0,002>**0,001**). Тем более следующая цифра 2 является сомнительной.

Округление чисел

Правило округления. Если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит цифра меньше пяти, то содержимое сохраняемых разрядов числа не изменяется. В противном случае в младший сохраняемый разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа.

При округлении числа, записанного в форме $x \pm \Delta x$, его предельная абсолютная погрешность увеличивается с учетом погрешности округления.

Например, округлим до сотых число 4,5371±0,0482. Неправильно было бы записать 4,54±0,05 , так как погрешность округленного числа складывается из погрешности исходного числа и погрешности округления. В данном случае она равна 0,0482 + 0,0029 = 0,0511. Округлять погрешности всегда следует с избытком, поэтому окончательный ответ: 4,54±0,06.

Пример 1.4. Пусть в приближенном значении a = 16,395 все цифры верны в широком смысле. Округлим a до сотых: a_1= 16,40. Погрешность округления $\Delta_{окр} = 0{,}005$. Для нахождения полной погрешности Δa_1,нужно сложить $\Delta_{окр}$ спогрешностью исходного значения a_1которая в данном случае может быть найдена из условия, что все цифры в записи a верны: Δa_1= 0,001. Таким образом, $\Delta a_1 = \Delta a + \Delta_{окр} = 0{,}001 + 0{,}005 = 0{,}006$. Отсюда следует, что в значении a_1 = =16,40 цифра 0 неверна в строгом смысле.

Вычисление погрешностей арифметических действий

1 Сложение и вычитание. Предельной абсолютной погрешностью алгебраической суммы является сумма соответствующих погрешностей слагаемых:

$$\Delta(X+Y) = \Delta X + \Delta Y, \qquad \Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y.$$

Пример 1.5. Даны приближенные числа X = 34,38 и Y = 15,23 , все цифры верны в строгом смысле. Найти Δ(X-Y) и δ(X-Y). По формуле Ф.1 получаем:

$$\Delta(X-Y) = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01.$$

Относительную погрешность получим по формуле связи:

$$\delta(X-Y) = \frac{\Delta(X-Y)}{|X-Y|};\ X-Y = 19{,}15 \quad и \quad \delta(X-Y) = \frac{0{,}01}{19{,}15} \approx 0{,}0005221 \le 0{,}0006 = 6\cdot 10^{-4}$$

2 Умножение и деление. Если $\delta X \ll |X|$ и $\delta Y \ll |Y|$, то имеет место следующая формула: $\delta(X \cdot Y) = \delta(X/Y) = \delta X + \delta Y$.

Пример 1.6. Найти Δ(X·Y) и δ(X·Y) для чисел из предыдущего примера. Сначала с помощью формулы Ф.2 найдем δ(X·Y):

$$\delta X = \frac{0{,}005}{34{,}38} = 0{,}00015, \qquad \delta Y = \frac{0{,}005}{15{,}23} = 0{,}00033,$$

$$\delta(X\cdot Y) = \delta X + \delta Y = 0{,}00015 + 0{,}00033 = 0{,}00048$$

Теперь Δ(X·Y) найдем с помощью формулы связи:

$$\Delta(X\cdot Y) = |X\cdot Y|\cdot\delta(X\cdot Y) = |34{,}38 - 15{,}23|\cdot 0{,}00048 \le 0{,}26\ .$$

3 Возведение в степень и извлечение корня. Если $\delta X \ll |X|$, то справедливы формулы

$$\delta(X^n) = n\cdot\delta X \quad ; \quad \delta(\sqrt[n]{X}) = \frac{\delta X}{n}$$

Метод подсчета верных цифр

Данный метод относится к нестрогим. Оценка точности вычислений, которую он дает, в принципе не гарантирована (в отличие от строгих методов), но на практике является довольно надежной. Суть метода заключается в том, что после каждой операции вычислений в полученном числе определяется количество верных цифр с помощью нижеследующие правил.

П.1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате верными следует считать, те цифры, десятичным разрядам которых соответствуют верные цифры во всех слагаемых. Цифры всех других разрядов кроме самого старшего из них перед выполнением сложения или вычитания должны быть округлены во всех слагаемых.

П.2. При умножении и делении приближенных чисел в результате верными следует считать столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим количеством верных значащих цифр. Перед выполнением этих действий среди приближенных данных нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы они имели лишь на одну значащую цифру больше него.

П.3. При возведении в квадрат или в куб, а также при извлечении квадратного или кубического корня в результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько имелось верных значащих цифр в исходном числе.

П.4. В промежуточных результатах помимо верных цифр следует оставлять одну сомнительную цифру (остальные сомнительные цифры можно округлять) для сохранения точности вычислений. В окончательном результате оставляют только верные цифры.

Вычисления по методу границ

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений - метод границ.

Пусть *f(x, y)* - функция, непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить ее значение f(a, b), где a и b-приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$НГ_a<a<ВГ_a;\ НГ_b<b<ВГ_b.$$

Здесь НГ, ВГ - обозначения соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения f(a, b),при известных границах значений a и b.

Допустим, что функция f(x, y) возрастает по каждому из аргументов хи y. Тогда

$$f(НГ_a, НГ_b< f(a, b)<f(ВГ_aВГ_b).$$

Пусть f(x, y) возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_aВГ_b)< f(a, b)< f(ВГ_a, НГ_b).$$

Указанный принцип особенно очевиден для основных арифметических действий. Пусть, например, f(x, y)=x + y. Тогда очевидно, что

$$НГ_a+НГ_b<a + b<ВГ_a+ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f_2(x, y) = x-y$ (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$$НГ_a-НГ_b<a - b<ВГ_a-ВГ_b.$$

Аналогично для умножения и деления:

$$НГ_a*НГ_b<a * b<ВГ_a*ВГ_b.$$

$$НГ_a/ВГ_b<a / b<ВГ_a/НГ_b.$$

Пример 1.7. Вычислите значение $A = \frac{(x-y)z}{x+y}$, где 2,57≤x≤2,58; 1,45≤y≤1,46; 8,33≤z≤8,34.

Действие	Содержимое	НГ	ВГ
1	X	2.57	2.58
2	Y	1.45	1.46
3	Z	8.33	8.34
4	x+y	4.02	4.04
5	x-y	1.11	1.13
6	(x-y)z	9.24	9.43
7	$\frac{(x-y)z}{x+y}$	2.28	2.35

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Выполните действия с рациональными числами.

а) Записать обыкновенные дроби в виде десятичной дроби: $\frac{95}{333}$, $\frac{13}{15}$.

б) Периодические дроби представить в виде обыкновенных дробей:

0, (72); 0,(513); 0, 0(27), 0,11(6).

2. Вычислите:

$$\left(4{,}25-\frac{\left(4\frac{9}{16}-\left(2\frac{1}{3}-0,(3)\right)\right)*\frac{18}{41}}{0{,}45}\right):1{,}4+0{,}08(3).$$

3. а) Выразите в процентах следующие числа: 0,95; 5,7; 1/20.

б) Выразите процентные числа обыкновенной или десятичной дробью: 5%; 7,09%, $3\frac{1}{7}$%.

в) Вычислите 75% от 64; найдите число, 35% от которого равны 140.

4. а) Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа: 0,302±0,003; 4300±5; 0,667±0,05.

б) Приближенное число записано в стандартном виде. Укажите границы абсолютной и относительной погрешностей: Х≈ 2,718; $X\approx 2{,}10*10^{-3}$, $X\approx 1{,}4900*10^{2}$.

в) Округлите число 27,0915 с недостатком, с избытком, с наименьшей погрешностью постепенно до одной значащей цифры.

5. Найдите сумму, разность, произведение, частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:

Х=25,74±0,2; У=96,42±0,3.

6.Вычислите: $F=\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot k}$, a=231,05±0,02; b=43±2;

c=27,81±0,003;d=321±20; k=843,44±0,03.

7. Установите, какое из приближений точнее:6/25≈1/4 или 1/3≈0,333.

Вариант 2

1. Выполните действия с рациональными числами.

а) Записать обыкновенные дроби в виде десятичной дроби: $\frac{35}{111}$, $\frac{7}{12}$.

б) Периодические дроби представить в виде обыкновенных дробей:

0, (42); 0,(918); 0, 0(01), 0,21(35).

2. Вычислите:

$$\left(\frac{\left(3{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 11,(6)}{1,(2)-1\frac{1}{18}}-\frac{\left(10{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 6}{\left(5{,}15-4\frac{1}{4}\right)\cdot 1,(1)}\right):42{,}5.$$

3. а) Выразите в процентах следующие числа: 0,67; 23,4; 23/50.

б) Выразите процентные числа обыкновенной или десятичной дробью: 8%; 9,11%, $42\frac{2}{3}$%.

в) Вычислите 5% от 185; найдите число, 3% от которого равны 24.

4.а) Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа: 0,678±0,001; 4129±12; 73548±250.

б) Приближенное число записано в стандартном виде. Укажите границы абсолютной и относительной погрешностей: Х≈ 2,100; $X\approx 1{,}001*10^{-2}$, $X\approx 1{,}49*10^{2}$.

в) Округлите число 3,425 с недостатком, с избытком, с наименьшей погрешностью постепенно до одной значащей цифры.

5. Найдите сумму, разность, произведение, частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:

Х=37,375±0,03; У=3,042±0,004.

6.Вычислить: $F=\frac{a\cdot b}{d\cdot k}$, $a=2{,}4*10^{-3}$; $b=2{,}03*10^{4}$; $d=4{,}34*10^{-5}$; $k=8{,}2*10^{3}$.

7. Установите, какое из приближений точнее:15/7≈2,14 или 1/9≈0,11.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Число 5 является действительным?

2 Приведите примеры иррациональных чисел.

3 Какая дробь называется периодической? Приведите примеры.

4 Как вычислить относительную погрешность?

5 Сколько значащих цифр в числе 34,456?

6 Даны приближенные числа 0,4; 0,40; 0,400. Равносильны ли записи этих чисел? Почему?

3.2 Практическая работа № 2

«Степени и корни. Решение иррациональных и показательных уравнений»

Учебная цель:

формировать умения по освоению применения определений и формул при выполнении вычислений и упрощения выражений, содержащих степени и корни.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Степенью числа ***a*** с натуральным показателем ***n*** называется

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Свойства степени:

1. $a^n \cdot a^m = a^{nm}$

2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

6. $a^0 = 1$

7. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

8. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Корнем n-ной степени числа ***a*** называется число, ***n***-ная степень которого равна *a*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ a > 0,$$

n- показатель корня, a – подкоренное выражение.

Если n – *нечетное число, то выражение* $\sqrt[n]{a}$ *имеет смысл при любых* a.

Если n – *четное число,* то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при положительных значенияха ≥ 0.

Арифметический корень: $\left.\begin{matrix} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in N, a \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \geq 0$

Корень *нечетной* степени из отрицательного числа: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Свойства корня:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

3. $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ 4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

5. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

7. Если*(a>b)>1*, то $a^x > b^x$, если*(a>b)<1*, то $a^x < b^x$

8. Если <u>*a>1*</u>, и *x>y*, то $a^x > a^y$

Пример2.1.

$\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

$\sqrt[6]{144} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[6]{12^2} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^2} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 6$

Степень с целым показателем

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0, n > 0$.
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
3. $a^0 = 1$, где $a \neq 0$. Если $a = 0$, то 0^0 не имеет смысла.
4. По определению: $a^1 = a$.

Степень с рациональным показателем

$$\boldsymbol{a^r = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Свойства:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$ 4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. Пусть r рациональное число $0 < a < b$, тогда

$a^r < b^r$ при $r>0$ $\qquad$ $a^r>b^r$ при $r<0$.

7 .Для любого рациональных чисел r и s из неравенства $r>s$ следует

$a^r>a^s$ при $a>1$ $\qquad$ $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Определение степени с рациональным показателем

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Задания для самостоятельной работы:

№ вар.	**Задание 1**. Вычислите значение выражения.	**Задание 2**. Упростите выражение.
1	а) $121^{0,16} \cdot 11^{1,68}$ б) $\frac{8^{4,6}}{16^{3,2}}$ в) $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$ г) $\frac{3^{4,4} \cdot 5^{4,4}}{15^{3,4}}$ д) $35^{7,2} \cdot 7^{-6,2} : 5^{4,2}$ е) $\left(\frac{10^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{10}}\right)^9$ ж) $\frac{\left(3^{\frac{4}{7}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{6^{12}}$ з) $2,5^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{2}{7}} \cdot 10^{\frac{6}{7}}$ и) $\frac{49^{6,2}}{7^{10,4}}$	а) $\frac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}$ б) $\frac{5(m^3)^4 + 3(m^4)^3}{(2m^6)^2}$ в) $\frac{(2x)^2 \cdot x^{-5}}{x^{-6} \cdot 2x^3}$ г) $\frac{a^6b^2}{(2a)^2b^6} \cdot \frac{8}{a^4b^{-4}}$ д) $\left((2x^3)^4 - (x^2)^6\right) : 3x^{12}$ е) $81x^4 \cdot x^{17} : (3x^7)^3$ ж) $(7x^3)^2 : 7x^6$ з) $(2a)^3 : a^5 \cdot a^2$ и) $\left(11a^6 \cdot b^3 - (3a^2b)^3\right) : (4a^6b^6)$
2	а) $2^{0,39} \cdot 8^{0,87}$ б) $\frac{3^{6,4}}{9^{2,2}}$ в) $\frac{4^{1,7}}{2^{1,4}}$ г) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}}$ д) $\frac{3^{4,5} \cdot 4^{4,5}}{12^{3,5}}$ е) $12^{3,2} \cdot 6^{-2,2} : 2^{2,2}$ ж) $\left(\frac{25^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{25}}\right)^3$ з) $\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{28^9}$ и) $2,5^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{5}{6}}$	а) $\frac{(7a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(21a^3b)^2}$ б) $\frac{(m^6)^5 + 17(m^{10})^3}{(3m^{15})^2}$ в) $\frac{(5x)^2 \cdot x^6}{x^3 \cdot 10x^5}$ г) $\frac{a^{-1}b^{-5}}{(2a)^2b^{-2}} \cdot \frac{3}{a^{-3}b^{-3}}$ д) $\left((5x^8)^3 - (x^{12})^2\right) : 31x^{24}$ е) $32x^3 \cdot x^7 : (4x^5)^2$ ж) $(4x^5)^3 : 4x^{15}$ з) $(6a)^3 : a^8 \cdot a^5$ и) $\left(17a^{12} \cdot b^3 - (5a^4b)^3\right) : (4a^{12}b^3)$

№ вар.	**Задание 1**. Вычислите значение выражения.	**Задание 2**. Упростите выражение.
3	а) $8^{0{,}24}\cdot 16^{0{,}32}$ б) $\dfrac{6^{8{,}2}}{36^{3{,}6}}$ в) $4^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{4}}$ г) $\dfrac{3^{4{,}4}\cdot 5^{4{,}4}}{15^{3{,}4}}$ д) $21^{0{,}6}\cdot 7^{1{,}4}:3^{-0{,}4}$ е) $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{5}}\right)^{3}$ ж) $\dfrac{\left(4^{\frac{4}{7}}\cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{28^{12}}$ з) $1{,}5^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{5}{6}}$ и) $\dfrac{16^{1{,}8}}{4^{1{,}6}}$	а) $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(4b)^2}{(20a^3b)^2}$ б) $\dfrac{7(m^6)^5+11(m^{10})^3}{(3m^{15})^2}$ в) $\dfrac{(2x)^4\cdot x^{-2}}{x^5\cdot 2x^{-3}}$ г) $\dfrac{a^5b^2}{(4a)^2b^6}\cdot\dfrac{32}{a^3b^{-4}}$ д) $\left((2x^3)^6-(5x^9)^2\right):13x^{18}$ е) $48x^7\cdot x^{13}:(2x^5)^4$ ж) $(4x^2)^2:2x^4$ з) $(6a)^2:a^6\cdot a^4$ и) $\left(15a^9\cdot b^3-(6a^3b)^3\right):(3a^9b^3)$
4	а) $4^{0{,}76}\cdot 8^{0{,}16}$ б) $\dfrac{2^{3{,}2}}{4^{1{,}6}}$ в) $4^{\frac{3}{7}}\cdot 16^{\frac{2}{7}}$ г) $\dfrac{3^{4{,}5}\cdot 4^{4{,}5}}{12^{3{,}5}}$ д) $6^{2{,}3}\cdot 3^{-0{,}3}:2^{2{,}3}$ е) $\left(\dfrac{10^{\frac{1}{3}}\cdot 10^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{10}}\right)^{2}$ ж) $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^{9}}$ з) $2{,}5^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}}\cdot 10^{\frac{4}{5}}$ и) $\dfrac{36^{5{,}3}}{6^{8{,}6}}$	а) $\dfrac{(3a^2)^3\cdot(5b)^2}{(15a^3b)^2}$ б) $\dfrac{11(m^4)^3+7(m^3)^4}{(3m^6)^2}$ в) $\dfrac{(4x)^2\cdot x^5}{x^4\cdot 5x^3}$ г) $\dfrac{a^{-2}b^{-5}}{(2a)^2b^{-2}}\cdot\dfrac{21}{a^{-4}b^{-3}}$ д) $\left((2x^2)^6-(5x^4)^3\right):61x^{12}$ е) $48x^{15}\cdot x^{13}:(2x^7)^4$ ж) $(2x^3)^2:2x^6$ з) $(4a)^2:a^7\cdot a^5$ и) $\left(11a^{24}\cdot b^6-(2a^4b)^6\right):(a^{24}b)$
5	а) $2^{0{,}31}\cdot 8^{0{,}23}$ б) $\dfrac{6^{6{,}4}}{36^{2{,}2}}$ в) $4^{\frac{3}{5}}\cdot 16^{\frac{1}{5}}$ г) $\dfrac{2^{2{,}4}\cdot 5^{5{,}4}}{10^{3{,}4}}$ д) $30^{0{,}4}\cdot 6^{0{,}6}:5^{-2{,}6}$ е) $\left(\dfrac{9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{9}}\right)^{3}$ ж) $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{14^{9}}$ з) $0{,}12^{\frac{1}{8}}\cdot 5^{\frac{3}{8}}\cdot 15^{\frac{7}{8}}$ и) $\dfrac{9^{1{,}9}}{3^{1{,}8}}$	а) $\dfrac{(4a^2)^3\cdot(5b)^2}{(20a^3b)^2}$ б) $\dfrac{17(m^6)^4+7(m^3)^8}{(4m^{12})^2}$ в) $\dfrac{(5x)^3\cdot x^2}{x^4\cdot 10x}$ г) $\dfrac{a^7b^9}{(2a)^2b^5}\cdot\dfrac{25}{a^5b^4}$ д) $\left((2x^3)^4-(3x^6)^2\right):7x^{12}$ е) $243x^6\cdot x^6:(3x^3)^4$ ж) $(5x^5)^2:50x^{10}$ з) $(3a)^5:a^8\cdot a^3$ и) $\left(17a^{12}\cdot b^3-(3a^4b)^3\right):(10a^{12}b)$

№ вар.	**Задание 1**. Вычислите значение выражения.	**Задание 2**. Упростите выражение.
6	а) $3^{0,34}\cdot 9^{0,83}$ б) $\frac{7^{8,6}}{49^{3,8}}$ в) $4^{\frac{1}{6}}\cdot 16^{\frac{5}{12}}$ г) $\frac{3^{6,4}\cdot 4^{6,4}}{12^{4,4}}$ д) $10^{-0,5}\cdot 5^{1,5}:2^{-3,5}$ е) $\left(\frac{10^{\frac{1}{6}}\cdot 10^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{10}}\right)^{9}$ ж) $\frac{\left(5^{\frac{3}{5}}\cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{35^{9}}$ з) $0,75^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\cdot 6^{\frac{4}{5}}$ и) $\frac{64^{4,3}}{8^{6,6}}$	а) $\frac{(6a^2)^3\cdot(5b)^2}{(30a^3b)^2}$ б) $\frac{14(m^5)^6+11(m^3)^{10}}{(5m^{15})^2}$ в) $\frac{(4x)^2\cdot x^5}{x^4\cdot 2x^3}$ г) $\frac{a^7b}{(5a)^3b^{-2}}\cdot\frac{125}{a^4b^3}$ д) $\left((5x^9)^2-(2x^3)^6\right):3x^{18}$ е) $16x^{13}\cdot x^{11}:(2x^6)^4$ ж) $(3x^3)^2:9x^6$ з) $(2a)^6:a^7\cdot a$ и) $\left(11a^6\cdot b^2-(4a^3b)^2\right):(2a^6b)$
7	а) $2^{0,85}\cdot 8^{0,05}$ б) $\frac{6^{5,8}}{36^{2,4}}$ в) $2^{\frac{4}{7}}\cdot 4^{\frac{3}{14}}$ г) $\frac{5^{4,1}\cdot 7^{5,1}}{35^{3,1}}$ д) $14^{-0,6}\cdot 7^{1,6}:2^{-3,6}$ е) $\left(\frac{25^{\frac{1}{3}}\cdot 25^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{25}}\right)^{3}$ ж) $\frac{\left(5^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^{9}}$ з) $0,08^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{6}{7}}\cdot 10^{\frac{5}{7}}$ и) $\frac{9^{2,7}}{3^{3,4}}$	а) $\frac{(7a^2)^3\cdot(2b)^2}{(14a^3b)^2}$ б) $\frac{3(m^6)^4+5(m^3)^8}{(2m^{12})^2}$ в) $\frac{(2x)^2\cdot x^{-5}}{x^{-6}\cdot 5x^3}$ г) $\frac{a^5b^{-7}}{(2a)^2b^{-3}}\cdot\frac{20}{a^3b^{-4}}$ д) $\left((2x^2)^9-(2x^3)^6\right):16x^{18}$ е) $64x^8\cdot x^{17}:(2x^5)^5$ ж) $(4x^3)^3:2x^9$ з) $(4a)^2:a^5\cdot a^3$ и) $\left(12a^8\cdot b^2-(4a^4b)^2\right):(2a^8b)$
8	а) $8^{0,04}\cdot 16^{0,22}$ б) $\frac{5^{8,8}}{25^{3,4}}$ в) $6^{\frac{5}{7}}\cdot 36^{\frac{1}{7}}$ г) $\frac{3^{7,4}\cdot 5^{8,4}}{15^{6,4}}$ д) $30^{0,2}\cdot 6^{-0,2}:5^{-1,8}$ е) $\left(\frac{64^{\frac{1}{6}}\cdot 64^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{64}}\right)^{3}$ ж) $\frac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{15^{12}}$ з) $0,75^{\frac{1}{9}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{8}{9}}$ и) $\frac{4^{3,4}}{2^{4,8}}$	а) $\frac{(3a^2)^3\cdot(2b)^2}{(6a^3b)^2}$ б) $\frac{9(m^3)^4+7(m^4)^3}{(4m^6)^2}$ в) $\frac{(7x)^2\cdot x^{-9}}{x^{-10}\cdot 10x^3}$ г) $\frac{a^7b^5}{(3a)^3b^2}\cdot\frac{27}{a^4b^3}$ д) $\left((5x^4)^3-(2x^2)^6\right):x^{12}$ е) $24x^3\cdot x^9:(2x^4)^3$ ж) $(7x^6)^2:7x^{12}$ з) $(4a)^3:a^5\cdot a^2$ и) $\left(13a^8\cdot b^2-(2a^4b)^2\right):(3a^8b^2)$

№ вар.	**Задание 1**. Вычислите значение выражения.	**Задание 2**. Упростите выражение.
9	а) $8^{0,48}\cdot 16^{0,14}$ б) $\frac{6^{12,6}}{36^{5,3}}$ в) $4^{\frac{1}{9}}\cdot 16^{\frac{4}{9}}$ г) $\frac{2^{4,4}\cdot 5^{4,4}}{10^{3,4}}$ д) $20^{-4,8}\cdot 5^{6,8} : 4^{-5,8}$ е) $\left(\frac{7^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{7}}\right)^{9}$ ж) $\frac{\left(9^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{18^{9}}$ з) $1,25^{\frac{1}{9}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 10^{\frac{8}{9}}$ и) $\frac{49^{3,7}}{7^{5,4}}$	а) $\frac{(2a^2)^3\cdot(3b)^2}{(6a^3b)^2}$ б) $\frac{17(m^3)^4+(m^4)^3}{(3m^6)^2}$ в) $\frac{(3x)^2\cdot x^5}{x^3\cdot 5x^4}$ г) $\frac{a^{-2}b^{-8}}{(4a)^2b^{-5}}\cdot\frac{64}{a^{-4}b^{-3}}$ д) $\left((3x^3)^4-(4x^6)^2\right):13x^{12}$ е) $27x\cdot x^5:(3x^2)^3$ ж) $(2x^2)^5:2x^{10}$ з) $(3a)^4:a^6\cdot a^2$ и) $\left(13a^8\cdot b^2-(2a^4b)^2\right):(3a^8b^2)$
10	а) $4^{0,52}\cdot 8^{0,32}$ б) $\frac{5^{5,8}}{25^{1,4}}$ в) $9^{\frac{5}{6}}\cdot 81^{\frac{1}{12}}$ г) $\frac{3^{5,1}\cdot 7^{5,1}}{21^{4,1}}$ д) $15^{1,7}\cdot 5^{0,3}:3^{0,7}$ е) $\left(\frac{9^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{9}}\right)^{9}$ ж) $\frac{\left(7^{\frac{4}{7}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{63^{12}}$ з) $1,5^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{7}{8}}$ и) $\frac{4^{2,8}}{2^{3,6}}$	а) $\frac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}$ б) $\frac{14(m^6)^4+11(m^3)^8}{(5m^{12})^2}$ в) $\frac{(4x)^3\cdot x^{-3}}{x^5\cdot 2x^{-5}}$ г) $\frac{a^7b^{-1}}{(2a)^3b^3}\cdot\frac{32}{a^4b^{-4}}$ д) $\left((3x^6)^2-(2x^3)^4\right):7x^{12}$ е) $9x^5\cdot x^5:(3x^5)^2$ ж) $(5x^2)^3:25x^6$ з) $(4a)^4:a^5\cdot a$ и) $\left(14a^6\cdot b^3-(6a^2b)^3\right):(2a^6b)$

№ вар.	**Задание 3**. Вычислите значение выражения.	**Задание 4**. Упростите выражение.
1	а) $\sqrt{65^2-56^2}$ б) $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}$ в) $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$ г) $\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$ д) $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$ е) $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$ ж) $\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}$ з) $(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}):\sqrt{\frac{3}{28}}$	а) $\frac{12\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ б) $\frac{\sqrt{81\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ в) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ г) $\frac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ д) $\frac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$
2	а) $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$ б) $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{49}$ в) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$ г) $\sqrt{15^2-12^2}$. д) $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}$ е) $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$ ж) $\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$ з) $\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}$	а) $\frac{\sqrt[9]{a}\,\sqrt[18]{a}}{a\sqrt[6]{a}}$ б) $\frac{\sqrt{81\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ в) $\frac{13\sqrt[6]{\sqrt[14]{a}}-9\sqrt[7]{\sqrt[12]{a}}}{8\sqrt{\sqrt[42]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[12]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[14]{a}\,\sqrt[35]{a}}{a\,\sqrt[10]{a}}$
3	а) $\frac{\sqrt[40]{6}\cdot\sqrt[24]{6}}{\sqrt[15]{6}}$ б) $\sqrt{13^2-12^2}$. в) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ г) $\frac{(3\sqrt{2})^2}{12}$ д) $\frac{(3\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{8-\sqrt{15}}$	а) $\frac{12\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ б) $\frac{\sqrt{64\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ в) $\frac{12\sqrt[6]{\sqrt[21]{a}}-4\sqrt[7]{\sqrt[18]{a}}}{4\sqrt[3]{\sqrt[42]{a}}}$

№ вар.	**Задание 3**. Вычислите значение выражения.	**Задание 4**. Упростите выражение.
3	е) $\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2}}$ ж) $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$ з) $\left(\sqrt{3\frac{3}{5}}-\sqrt{1\frac{3}{5}}\right):\sqrt{\frac{2}{125}}$	г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m}\cdot\sqrt[20]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[12]{a}\,\sqrt[24]{a}}{a\sqrt[8]{a}}$
4	а) $\sqrt{61^2-60^2}$. е) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{12})^2}{7+\sqrt{24}}$ б) $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$ в) $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$ З) $\frac{\sqrt[15]{6}\cdot\sqrt[10]{6}}{\sqrt[6]{6}}$ г) $\frac{(2\sqrt{3})^2}{10}$ д) $\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{54}}{\sqrt[4]{2}}$ ж) $\left(\sqrt{58\frac{1}{3}}-\sqrt{9\frac{1}{3}}\right):\sqrt{\frac{7}{12}}$	а) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[12]{m}\cdot\sqrt[4]{m}}$ б) $\frac{\sqrt{100\sqrt[13]{b}}}{\sqrt[26]{b}}$ в) $\frac{12\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}-9\sqrt[4]{\sqrt[35]{a}}}{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[30]{a}\,\sqrt[45]{a}}{a\sqrt[18]{a}}$
5	а) $\sqrt{58^2-42^2}$. З) $\left(\sqrt{98}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{8}$ б) $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$ в) $\frac{(5\sqrt{3})^2}{10}$ г) $\frac{\sqrt[20]{3}\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[4]{3}}$ д) $\frac{\sqrt{0,6}\cdot\sqrt{1,4}}{\sqrt{0,21}}$ Ж) $\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})^2}{10+\sqrt{75}}$ е) $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$	а) $\frac{\sqrt[5]{\sqrt{m}}}{\sqrt{25\sqrt[5]{m}}}$ б) $\frac{\sqrt{25\sqrt[6]{b}}}{\sqrt[12]{b}}$ в) $\frac{13\sqrt[6]{\sqrt[14]{a}}-9\sqrt[7]{\sqrt[12]{a}}}{8\sqrt{\sqrt[42]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[30]{m}\cdot\sqrt[6]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[21]{a}\,\sqrt[28]{a}}{a\sqrt[12]{a}}$
6	а) $\sqrt{82^2-80^2}$. б) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{12}$ в) $(\sqrt{18}-\sqrt{10})(\sqrt{18}+\sqrt{10})$ г) $\frac{(2\sqrt{3})^2}{5}$ д) $\frac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$ е) $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$	а) $\frac{\sqrt{9\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[8]{b}}$ б) $\frac{\sqrt[11]{\sqrt{m}}}{\sqrt{25\sqrt[11]{m}}}$ в) $\frac{13\sqrt{\sqrt[20]{a}}-4\sqrt[4]{\sqrt[10]{a}}}{9\sqrt[5]{\sqrt[8]{a}}}$

№ вар.	**Задание 3**. Вычислите значение выражения.	**Задание 4**. Упростите выражение.
6	ж) $\left(\sqrt{2\frac{4}{7}}-\sqrt{7\frac{1}{7}}\right):\sqrt{\frac{2}{63}}$ з) $\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2}{5+\sqrt{16}}$	г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[20]{m}\cdot\sqrt[5]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[24]{a}\,\sqrt[48]{a}}{a\,\sqrt[16]{a}}$
7	а) $\sqrt{20^2-12^2}$. б) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}\right)\cdot\sqrt{5}$ в) $(\sqrt{10}-\sqrt{15})(\sqrt{10}+\sqrt{15})$ г) $\frac{(7\sqrt{2})^2}{25}$ д) $\sqrt[16]{16}\cdot\sqrt[8]{64}$ е) $\frac{\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{0{,}6}}{\sqrt{0{,}16}}$ ж) $\frac{(\sqrt{12}+\sqrt{6})^2}{9+\sqrt{72}}$ з) $\left(\sqrt{5\frac{2}{5}}-\sqrt{2\frac{2}{5}}\right):\sqrt{\frac{3}{20}}$	а) $\frac{\sqrt{4\sqrt[9]{b}}}{\sqrt[18]{b}}$ б) $\frac{\sqrt[10]{\sqrt{m}}}{\sqrt{4\sqrt[10]{m}}}$ в) $\frac{10\sqrt[7]{\sqrt[18]{a}}-7\sqrt[3]{\sqrt[42]{a}}}{3\sqrt[6]{\sqrt[21]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[42]{m}\cdot\sqrt[7]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[20]{a}\,\sqrt[30]{a}}{a\,\sqrt[12]{a}}$
8	а) $\sqrt{65^2-60^2}$. б) $(\sqrt{8}-\sqrt{10})(\sqrt{8}+\sqrt{10})$ в) $\sqrt[4]{729}\cdot\sqrt[12]{729}$ г) $\frac{(2\sqrt{6})^2}{25}$ д) $\frac{\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{2{,}1}}{\sqrt{0{,}56}}$ е) $\left(\sqrt{58\frac{1}{3}}-\sqrt{9\frac{1}{3}}\right):\sqrt{\frac{7}{12}}$ ж) $\frac{\sqrt[24]{10}\cdot\sqrt[12]{10}}{\sqrt[8]{10}}$ з) $\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2}{6+\sqrt{20}}$	а) $\frac{\sqrt{9\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[8]{b}}$ б) $\frac{\sqrt[6]{\sqrt{m}}}{\sqrt{100\sqrt[6]{m}}}$ в) $\frac{11\sqrt[4]{\sqrt[14]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[8]{a}}}{2\sqrt{\sqrt[28]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[42]{m}\cdot\sqrt[7]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[6]{a}\,\sqrt[12]{a}}{a\sqrt[4]{a}}$
9	а) $\sqrt{500^2-300^2}$. б) $\left(\sqrt{48}-\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}$ в) $(\sqrt{17}-\sqrt{7})(\sqrt{17}+\sqrt{7})$ г) $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}$ д) $\frac{\sqrt{1{,}5}\cdot\sqrt{0{,}6}}{\sqrt{0{,}1}}$ е) $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$ ж) $\frac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$ з) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2}{9+\sqrt{77}}$	а) $\frac{\sqrt{25\sqrt[6]{b}}}{\sqrt[12]{b}}$ б) $\frac{\sqrt[7]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[7]{m}}}$ в) $\frac{18\sqrt[3]{\sqrt[8]{a}}-3\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}}}{3\sqrt{\sqrt[12]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[12]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[21]{a}\,\sqrt[42]{a}}{a\,\sqrt[14]{a}}$

№ вар.	**Задание 3**. Вычислите значение выражения.	**Задание 4**. Упростите выражение.
10	а) $\sqrt{52^2-48^2}$. б) $(\sqrt{11}-\sqrt{3})(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ в) $\frac{(2\sqrt{3})^2}{5}$ г) $\frac{\sqrt{0,6}\cdot\sqrt{1,2}}{\sqrt{0,18}}$ д) $(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}):\sqrt{\frac{3}{28}}$ е) $\frac{\sqrt[20]{10}\cdot\sqrt[5]{10}}{\sqrt[4]{10}}$ ж) $\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})^2}{8+\sqrt{60}}$ з) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{63}\right)\cdot\sqrt{7}$	а) $\frac{\sqrt{64\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[8]{b}}$ б) $\frac{\sqrt[7]{\sqrt{m}}}{\sqrt{100\sqrt[7]{m}}}$ в) $\frac{21\sqrt[3]{\sqrt[14]{a}}-6\sqrt[7]{\sqrt[6]{a}}}{5\sqrt{\sqrt[21]{a}}}$ г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[18]{m}\cdot\sqrt[9]{m}}$ д) $\frac{\sqrt[12]{a}\,\sqrt[24]{a}}{a\sqrt[8]{a}}$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с выполненной проверкой.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Как определяется степень числа с целым показателем? Чему равно a^0?

2 Чему равно $\sqrt[n]{3^{2n}}$?

3 При каких значениях x имеет значение выражение $\sqrt[3]{x-5}$?

4 Верно ли неравенство $(\frac{1}{3})^{-2} > (\frac{1}{3})^{-3}$? Почему?

5 Запишите с помощью знака корня выражение $a^{\frac{5}{3}}$.

6 Являются ли решением уравнения $x^5=-32$ числа 2 и -2?

3.3 Практическая работа № 3
«Вычисление и сравнение логарифмов»

Учебная цель:
формировать умения по освоению применения определения и формул при выполнении вычислений и упрощения выражений, содержащих логарифмы.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2 Решите самостоятельную работу. Оформите подробное решение письменно в тетради с указанием ответов.
3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Логарифмом положительного числа $\boldsymbol{x}$ *по основанию* $\boldsymbol{a}$($a>0$ и $a\neq 0$) называется <u>показатель степени</u>, в который надо возвести число $\boldsymbol{x}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

Основное логарифмическое тождество $a^{log_a b} = b$

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов

$\log_a 1 = 0$	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$
$\log_a a = 1$	$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$	$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
$\log_a x^p = p\log_a x$	

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Найдите значение выражения.

1. $2^{3+\log_2 15}$
2. $\log_2 4 \cdot \log_3 81$
3. $9 \cdot 10^{\lg 3}$
4. $\log_{25} 25 + \cdot \log_{0,2} 625$
5. $\frac{\log_9 \sqrt[5]{17}}{\log_9 17}$
6. $\log_3 13 \cdot \log_{13} 9$
7. $\frac{5^{\log_{13} 507}}{5^{\log_{13} 3}}$
8. $(1 - \log_6 24)\,(1 - \log_4 24)$
9. $75\log_{11} \sqrt[5]{11} \cdot \log_{13} 9$
10. $\frac{\log_3 63}{2+\log_3 7}$
11. $\frac{\log_8 20}{\log_8 5} + \log_5 0{,}05$
12. $\log_{0,5} 5 \cdot \log_5 2$
13. $log^3{}_{\sqrt{7}}7$
14. $25^{\log_5 \sqrt{6}}$
15. $\log_{16} \log_6 36$
16. $\frac{98}{5^{\log_5 7}}$

17. $\log_a a^3 b^8$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$ 18. $\left(5^{\log_5 7}\right)^{\log_7 2}$

Пользуясь определением и свойствами логарифмов, решите уравнения.

19. $\log_5(4+x) = 2$ 20. $\log_5(5-x) = \log_5 3$

21. $\log_4(3+x) = \log_5(4x-15)$ 22. $\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$

23. $\log_4(8-5x) = 2\log_4 3$ 24. $\log_9(x^2+x) = \log_9(x^2-9)$

Вариант 2

Найдите значение выражения.

1. $6^{2+\log_6 9}$ 2. $\log_6 216 \cdot \log_9 279$

3. $8 \cdot 8^{\log_8 7}$ 4. $\log_4 8 + \log_{0,25} 0,125$

5. $\frac{\log_2 \sqrt[8]{27}}{\log_2 27}$ 6. $\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$

7. $\frac{8^{\log_{11} 242}}{8^{\log_{11} 2}}$ 8. $(1-\log_8 48)\,(1-\log_6 48)$

9. $\log_{\sqrt[9]{4}} 4$ 10. $\frac{\log_2 52}{2+\log_2 13}$

11. $\frac{\log_2 20}{\log_2 12} + \log_{12} 0,05$ 12. $\log_{0,4} 8 \cdot \log_8 2,5$

13. $log^2_{\sqrt{13}} 169$ 14. $49^{\log_7 \sqrt{5}}$

15. $\log_{16} \log_3 9$ 16. $\frac{5}{8^{\log_8 10}}$

17. $\log_a a^2 b^6$, если $\log_b a = \frac{2}{11}$ 18. $\left(7^{\log_5 3}\right)^{\log_7 5}$

Пользуясь определением и свойствами логарифмов, решите уравнения.

19. $\log_3(9+x) = 4$ 20. $\log_3(14-x) = \log_3 5$

21. $\log_3(4+x) = \log_3(2x-12)$ 22. $\log_{\frac{1}{7}}(7-3x) = -2$

23. $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$ 24. $\log_4(x^2-4x) = \log_9(x^2+3)$

Вариант 3

Найдите значение выражения.

1. $3^{2+\log_3 5}$

2. $\log_5 125 \cdot \log_4 16$

3. $9 \cdot 4^{\log_4 3}$

4. $\log_{2,75} 4 - \log_{2,75} 11$

5. $\frac{\log_5 8}{\log_{25} 8}$

6. $\log_7 8 \cdot \log_8 49$

7. $\frac{7^{\log_9 162}}{7^{\log_9 2}}$

8. $(1-\log_8 24)\,(1-\log_3 24)$

9. $\log_{\sqrt[5]{10}} 10$

10. $\frac{\log_8 320}{2+\log_8 5}$

11. $\frac{\lg 10}{\lg 7} + \log_7 0{,}1$

12. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$

13. $log^2{}_{\sqrt{8}}8$

14. $6^{2\log_6 14}$

15. $\log_{16}\log_7 4\,9$

16. $\frac{30}{3^{\log_3 2}}$

17. $\log_a a^3b^6$, если $\log_b a = \frac{2}{13}$

18. $\left(7^{\log_3 2}\right)^{\log_2 3}$

Пользуясь определением и свойствами логарифмов, решите уравнения.

19. $\log_2(3+x) = 5$

20. $\log_{13}(17-x) = \log_{13} 12$

21. $\log_3(6+x) = \log_3(4x-9)$

22. $\log_{\frac{1}{8}}(13-x) = -2$

23. $\log_2(4-x) = 2\log_2 5$

24. $\log_4(x^2+x) = \log_4(x^2+9)$

25. $\log_3(3-4x) = \log_3(1-5x)+1$

Вариант 4

Найдите значение выражения.

1. $5^{3+\log_5 7}$

2. $\log_7 343 \cdot \log_2 8$

3. $9 \cdot 4^{\log_4 2}$

4. $\log_{0,6} 5 - \log_{0,6} 3$

5. $\frac{\log_6 \sqrt[4]{11}}{\log_6 11}$

6. $\log_3 11 \cdot \log_{11} 27$

7. $\frac{3^{\log_{13} 507}}{3^{\log_{13} 3}}$

8. $(1-\log_{19} 95)\,(1-\log_5 95)$

9. $42\log_2 \sqrt[6]{2}$

10. $\frac{\log_2 48}{3+\log_2 6}$

11. $\frac{\log_6 2}{\log_6 3} + \log_3 0{,}5$

12. $\log_{0,5} 9 \cdot \log_9 2$

13. $log^2{}_{\sqrt{8}}512$ 14. $16^{\log_4\sqrt{13}}$

15. $\log_4\log_9 81$ 16. $\frac{70}{13^{\log_{13}10}}$

17. $\log_a a^6 : b^4$, если $\log_b a = -2$ 18. $\left(5^{\log_5 3}\right)^{\log_3 5}$

Пользуясь определением и свойствами логарифмов, решите уравнения.

19. $\log_2(3+x) =$ 20. $\log_3(6-x) = \log_3 7$

21. $\log_3(8+x) = \log_3(5x-4)$ 22. $\log_{\frac{1}{4}}(9-5x) = -3$

23. $\log_5(5-5x) = 2\log_5 2$ 24. $\log_5(x^2+5x) = \log_5(x^2+2)$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с подробным решением и с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что называется логарифмом числа?

2 Запишите основное логарифмическое тождество.

3 Какие уравнения называются равносильными?

3.4 Практическая работа № 4
«Логарифмирование и потенцирование выражений. Решение логарифмических уравнений»

Учебная цель:

отработать практические навыки логарифмирования, потенцирования, в применении свойств степени, корня для преобразования алгебраических выражений,

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите подробное решение письменно в тетради с указанием ответов.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Уравнение называется *показательным*, если в нем неизвестное содержится в показателе степени.

Уравнение называется *логарифмическим*, если в нем неизвестное содержится под знаком логарифма.

Логарифмирование – действие, заключающее в нахождении логарифма числового, алгебраического или иного выражения. Если число $\boldsymbol{x}$ представлено алгебраическим выражением, то логарифм любого выражения можно выразить через логарифмы составляющих его чисел.

Переход от логарифмического выражения к алгебраическому называется **потенцированием**, то есть, необходимо произвести действие, обратное логарифмированию.

Решение логарифмического уравнения

Для решения уравнения с логарифмами, необходимо, чтобы слева и справа от знака равно находились логарифмы с одинаковыми основаниями. Если логарифм равняется какому-либо числу, то это число, пользуясь свойствами, необходимо представить в виде логарифма, с нужным нам основанием.

1) По определению логарифма

$$\log_a x = b$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = a^b \end{cases}$$

2) Потенцирование – преобразование, заключающееся в переходе от уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

к системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

При потенцировании потери корней не происходит, но могут появиться посторонние корни, для этого ставятся два первых условия существования логарифма.

3) Замена переменной (подстановка), которая логарифмическое уравнение сводит к рациональному уравнению.

Пример 4.1. Решить уравнение $\log_2(2x-6)=3$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x-6>0 \\ 2x-6=2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>6 \\ 2x-6=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ 2x=8+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=14:2=7. \end{cases}$$

Пример 4.2. Решить уравнение $\log_3(x^2-4)=\log_3(8x+5)$.

Решение.

$$x^2-4=8x+5$$
$$x^2-8x-9=0$$
$$D=b^2-4ac=8^2-4\cdot(-9)=100$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$
$$x_1=\frac{8+10}{2}=9;\ x_2=\frac{8-10}{2}=-1.$$

Проверка:

При x=99^2-4=77>0, 8*9+5=77>0. Значит x=9корень уравнения.

При x=-1(-1)^2-4=-3<0. Значит x=-1 не является корнем уравнения по определению логарифма числа.

Пример 4.3. Решить уравнение $\log_2^2 x-3\log_2 x-4=0$.

Решение.

$$x>0$$
$$\log_2 x=y;$$
$$y^2-3y-4=0$$
$$D=25$$
$$y_1=4;\ \ y_2=-1;$$
$$\log_2 x=4 \qquad \log_2 x=-1$$
$$x=2^4=16; \qquad x=2^{-1}=0.5.$$

Пример 4.4. Решить уравнение $log_2(x-5)+log_2(x+2)=3$.

Решение. Используем свойство логарифмов. Представим число 3 как логарифм по основанию 2, получим уравнение в виде

$$log_2(x-5)(x+2)=log_2 8$$
$$(x-5)(x+2)=8$$
$$x^2-3x-10=8$$
$$x^2-3x-18=0$$
$$x_1=-3;\ \ x_2=6.$$

Проверка: убеждаемся, что

при $x=-3$ $log_2(x-5)$и $log_2(x+2)$ не имеют смысла.

Ответ: $x = 6$.

Решение логарифмического неравенства

Также, как и логарифмическое уравнение, сводится к тому чтобы в обоих частях неравенства находились логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\log_a x > (<) b$$

$$\log_a x > (<) \log_a c^b$$

Если $a>1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает, и знак неравенства не изменяется $x > (<) c^b$

Если $0<a<1$, то функция $y = \log_a x$ убывает, и знак неравенства изменяется $x < (>) c^b$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; б) $log_{49} 7$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+log_3 2}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $16b^7 \cdot \sqrt[5]{c}$ $(c > 0,\ b > 0)$.

4. Найдите x, если $log_3 x = 2log_3 7 + \frac{2}{3}log_3 27 - \frac{3}{2}log_3 16$.

5.Вычислите: а) 2^{-1}; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625 \cdot 5^{-3}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $4^{x+3} + 4^{x} = 260$;2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$; 3) $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^x - 2}$;

4) $36^{x} - 2*18^{x} = 8*9^{x}$;5) $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;6) $\log_{12} (x^2 - x) = 1$;

7) $\log^2_{0,3}$ (x+1) – 4 $\log_{0,3}$ (x+1) + 3 =0; 8) $9^x*3^x = 81$.

7. Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^x = 81 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_3(x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3(x-2y) \\ \log_{\frac{1}{4}}(x-2y) = -1 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Найдите: а) $log_5 \frac{1}{25}$; б) $log_{64} 8$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $2^{1+log_2 5}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^4}}$ $(c > 0,\ b > 0)$.

4. Найдите x, если $log_2 x = 2log_2 5 - \frac{1}{3}log_2 8 + log_2 0{,}2$.

5. Вычислите: а) 1^{-7}; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9 \cdot 0{,}027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $9^x - 7*3^x = -12$;2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{81}\right)^x$; 3) $\frac{4^x+10}{4} = \frac{9}{4^x-2}$;

4) $81^x - 2*9^x = 8*3^x$;5) $\log_5(x^2 - 10) = \log_5 9x$;6) $\log_7(x^2 + 6x) = 1$;

7) $\log^2_{0,6}(x + 3) + \log_{0,6}(x - 3) = \log_{0,6}(2x - 1)$; 8) $25^x*5^x = 625$.

7.Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 125 - \log_3 5 \\ \log_3(x-1) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_2(x^2+3x-2) - \log_2 y = 1 \\ (3x - y) = 2 \end{cases}$.

Вариант 3

1. Найдите: а) $lg 10000$; б) $log_8 1$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+log_3 2}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 3 выражение $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}$ $(c>0,\ b>0)$.

4. Найдите x, если $log_5 x = log_5 1{,}5 + \frac{1}{3} log_5 8$.

5.Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\frac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $4^{x+3} + 4^{x} = 260$;2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$; 3) $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^x-2}$;

4) $36^{x} - 2*18^{x} = 8*9^x$;5) $\log_3(x^2+6) = \log_3 5x$;6) $\log_{12}(x^2 - x) = 1$;

7) $\log^2_{0,3}(x+1) - 4\log_{0,3}(x+1) + 3 = 0$; 8) $9^x*3^x = 81$.

7. Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} 9^x\cdot 3^x = 81 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_3(x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3(x-2y) \\ \log_{\frac{1}{4}}(x-2y) = -1 \end{cases}$.

Вариант 4

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$; б) $lg\, 0{,}01$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\sqrt{2}^{2+log_4 5}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 0,7 выражение $\frac{0{,}49b^3}{c^5\cdot\sqrt{c}}$ $(c>0,\ b>0)$.

4. Найдите x, если $lg\, x = 1 + 2lg\, 3 - \frac{2}{3}lg\, 125$.

5.Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0,75} - 12\cdot 0,0081^{-0,25}$;

г) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $9^x - 7*3^x = -12$;2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x}$; 3) $\frac{4^x+10}{4} = \frac{9}{4^x-2}$;

4) $81^x - 2*9^x = 8*3^x$;5) $\log_5(x^2 - 10) = \log_5 9x$;6) $\log_7(x^2 + 6x) = 1$;

7) $\log^2_{0,6}(x+3) + \log_{0,6}(x-3) = \log_{0,6}(2x-1)$; 8) $25^x * 5^x = 625$.

7.Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 125 - \log_3 5 \\ \log_3(x-1) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_2(x^2+3x-2) - \log_2 y = 1 \\ (3x-y) = 2 \end{cases}$.

Вариант 5

1. Найдите: а) $log_3 \frac{1}{81}$; б) $log_4 \sqrt{2}$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+log_3 5}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение $25b^3 \cdot \sqrt[4]{c^7}$ $(c>0,\ b>0)$.

4. Найдите x, если $log_4 x = 2log_4 10 + \frac{3}{4}log_4 81 - \frac{2}{3}log_4 125$.

5.Вычислите: а) $5^0\cdot(-3)^{-2} + (-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $4^{x+3} + 4^{x} = 260$;2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$; 3) $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^x-2}$;

4) $36^{x} - 2*18^{x} = 8*9^{x}$;5) $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;6) $\log_{12} (x^2 - x) = 1$;

7) $\log^2_{0,3} (x+1) - 4\log_{0,3} (x+1) + 3 = 0$; 8) $9^x*3^x = 81$.

7. Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^x = 81 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x-2y) \\ \log_{\frac{1}{4}} (x-2y) = -1 \end{cases}$.

Вариант 6

1. Найдите: а) $log_5 \frac{1}{5}$; б) $log_2 16\sqrt{2}$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+log_2 3}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 0,2 выражение $\frac{0{,}0016b^4}{c \cdot \sqrt[7]{c^2}}$ $(c > 0,\ b > 0)$.

4. Найдите x, если $log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2} log_{\frac{1}{3}} 16 - log_{\frac{1}{3}} 8 + log_{\frac{1}{3}} 28$.

5.Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$;

г) $\frac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $9^{x} - 7*3^{x} = -12$;2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x}$; 3) $\frac{4^x+10}{4} = \frac{9}{4^x-2}$;

4) $81^{x} - 2*9^{x} = 8*3^{x}$;5) $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 9x$;6) $\log_7 (x^2 + 6x) = 1$;

7) $\log^2_{0,6} (x+3) + \log_{0,6} (x-3) = \log_{0,6} (2x-1)$; 8) $25^x*5^x = 625$.

7.Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 125 - \log_3 5 \\ \log_3 (x-1) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1 \\ (3x - y) = 2 \end{cases}$.

Вариант 7

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$; б) $lg\, 0{,}1$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите:

$5^{-1+log_5 2}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\dfrac{0{,}001\sqrt[3]{c^2}}{b^3}$

$(c > 0,\ b > 0)$.

4. Найдите x, если $log_4 x = \frac{1}{2} log_4 7 + log_4 32 - \frac{1}{2} log_4 28$.

5.Вычислите: а) $\left(6 \cdot 2^{-2}\right)^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\dfrac{6^{1,7} \cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $4^{x+3} + 4^{x} = 260$;2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$; 3) $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^x - 2}$;

4) $36^{x} - 2*18^{x} = 8*9^{x}$;5) $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;6) $\log_{12} (x^2 - x) = 1$;

7) $\log^2_{0,3} (x+1) - 4 \log_{0,3} (x+1) + 3 = 0$; 8) $9^x*3^x = 81$.

7. Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^x = 81 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x - 2y) \\ \log_{\frac{1}{4}} (x - 2y) = -1 \end{cases}$.

Вариант 8

1. Найдите: а) $log_{0,2} 25$; б) $lg\, 0{,}001$.

2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите:

$0{,}2^{1+log_{0,2} 5}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\sqrt{10}b^5c^{-\frac{1}{3}}$ $(c>0,\ b>0)$.

4. Найдите x, если $log_3 x = log_3 12 - \frac{1}{2}log_3 32 + \frac{1}{2}log_3 6$.

5.Вычислите: а) $(-3)^{-4}$; б) $0.01^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $136^0 + 0{,}027^{-\frac{1}{3}} + \left(0{,}2^{-13} \cdot 125^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4\right)^{-2}$.

6. Решите следующие уравнения:

1) $9^x - 7*3^x = -12$;2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{81}\right)^x$; 3) $\frac{4^x+10}{4} = \frac{9}{4^x-2}$;

4) $81^x - 2*9^x = 8*3^x$;5) $\log_5(x^2 - 10) = \log_5 9x$;6) $\log_7(x^2 + 6x) = 1$;

7) $\log^2_{0,6}(x + 3) + \log_{0,6}(x - 3) = \log_{0,6}(2x - 1)$; 8) $25^x*5^x = 625$.

7.Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 125 - \log_3 5 \\ \log_3(x-1) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \log_2(x^2+3x-2) - \log_2 y = 1 \\ (3x - y) = 2 \end{cases}$.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с подробным решением и с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какие уравнения называются равносильными?

2 Обязательно ли выполнять проверку при решении логарифмических уравнений?

3 Какие методы преобразования уравнений Вы знаете?

3.5 Практическая работа № 5
«Параллельность в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей»

Учебная цель:

формировать умение построения пространственных фигур и умение рассчитывать основные характеристики фигур, используя перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите подробное решение письменно в тетради с указанием ответов.

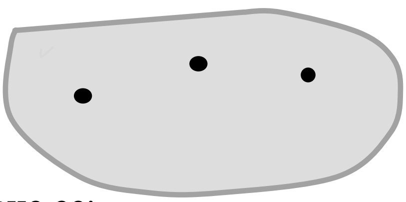
3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию лабораторной работы:

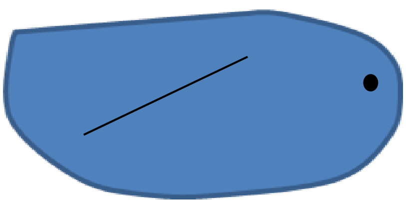
основные характеристики по содержанию лабораторной работы:

Рассмотрим способы задания плоскости:

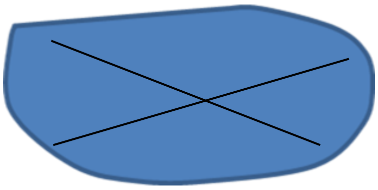
1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой:



2 Прямой и точкой вне ее:



3Двумя пересекающимися прямыми:

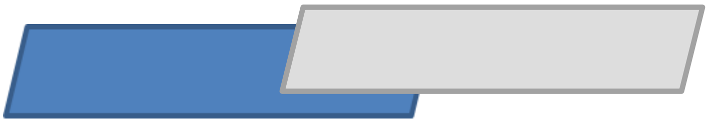


Это означает, что существует одна и только одна плоскость, проходящая через указанные объекты:

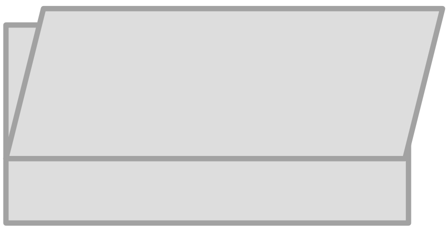
- три точки, не лежащие на одной прямой;
- прямую и точку вне ее;
- 2 пересекающиеся прямые.

Расположение двух плоскостей в пространстве

1 Если плоскости не имеют общих точек, не пересекаются, то они параллельны:

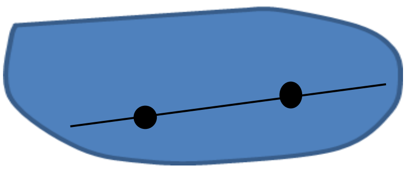


2 Если две плоскости имеют две общие точки, то они пересекаются по прямой:

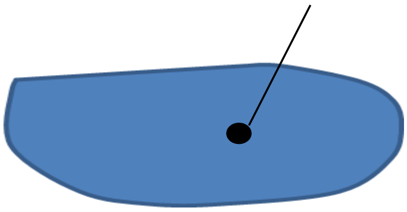


Расположение прямой и плоскости

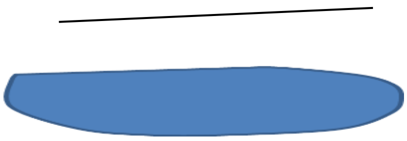
1 Прямая лежит в плоскости, если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости:



2 Прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е. прямая пересекает плоскость:



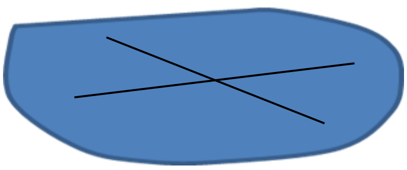
3 Прямая и плоскость не имеют общих точек: прямая и плоскость не пересекаются,т.е. прямая параллельна плоскости:



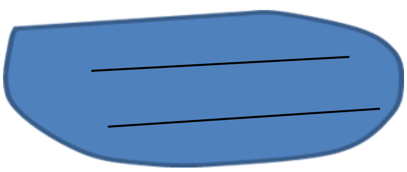
Расположение двух прямых

1 Если две прямые лежат в одной плоскости, тогда

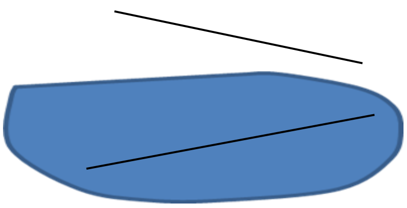
-они либо пересекаются, т.е. имеют одну общую точку



- либо не имеют общих точек, т.е. параллельны



2 Не лежат в одной плоскости: они не имеют общих точек, т.е. скрещиваются:



Как узнать, являются ли две прямые скрещивающимися?

Надо найти плоскость, в которой лежит одна из этих прямых, а вторая пересекает эту плоскость, но при этом в точке, не лежащей на первой прямой. Или надо знать, что они не параллельны, но могут быть расположены в двух параллельных плоскостях.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $90°$.

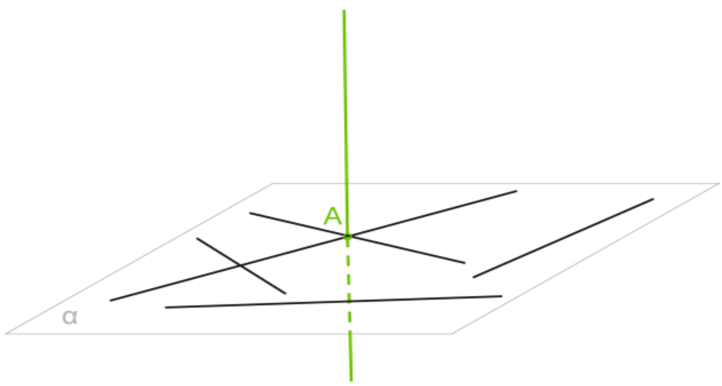
В пространстве перпендикулярными называют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся прямые, так как мы говорим об угле, который могут образовать эти прямые, если их поместить в одной плоскости.

Так же как и в плоскости, в пространстве перпендикулярные прямыеaиb обозначают $a \perp b$.

Теорема 5.1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая перпендикулярна к этой прямой.

Перпендикулярность прямой и плоскости

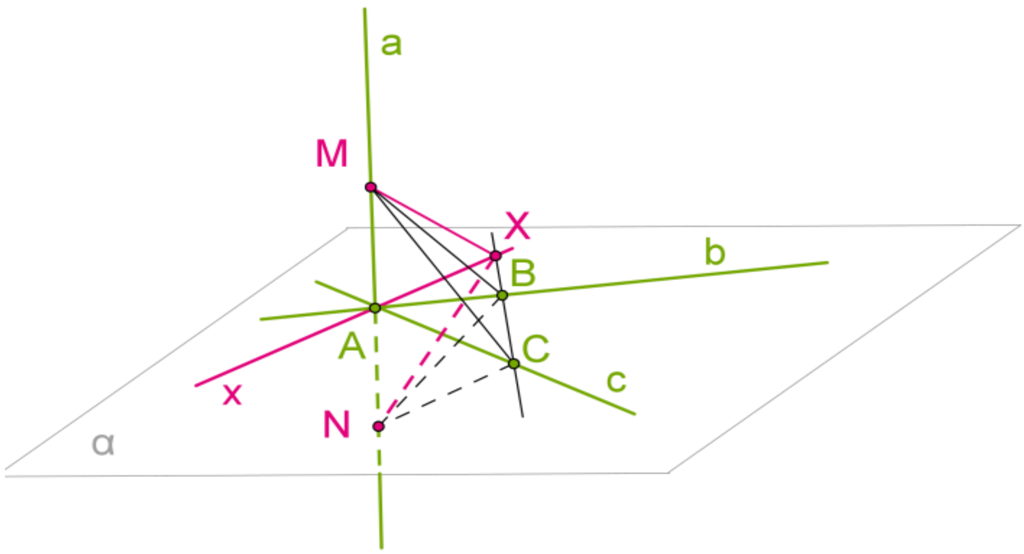
Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости.



Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как$a \perp \alpha$.

Теорема 5.2. Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярно данной плоскости, притом только одна.

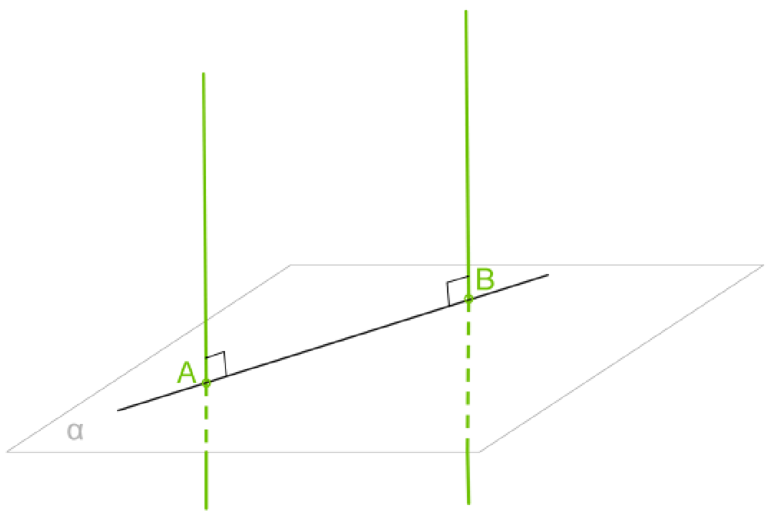
Теорема 5.3. <u>Признак перпендикулярности прямой и плоскости.</u>
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

1.Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Перпендикулярность плоскостей

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен девяноста градусам.

Обозначают $\alpha \perp \beta$.

Если плоскости α и β перпендикулярны, то можно также сказать, что плоскость α перпендикулярна к плоскости β или плоскость β перпендикулярна к плоскости α. Поэтому перпендикулярные плоскости α и β часто называют взаимно перпендикулярными.

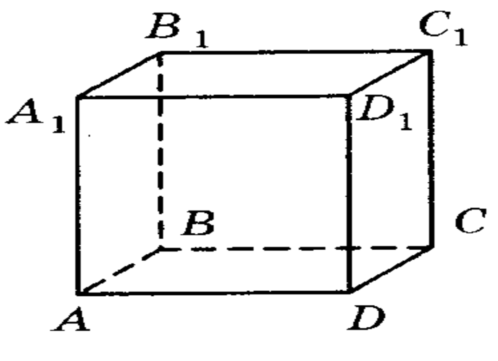
В качестве примера перпендикулярных плоскостей можно привести плоскости стены и пола в комнате.

Теорема 5.4. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то заданные плоскости перпендикулярны.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Дана прямая CC_1 (см. рисунок)



2.

Пользуясь данным рисунком, назовите:

1) плоскость, в которой лежит данная прямая;

2) плоскость, которую пересекает данная прямая;

3) плоскость, которой параллельна данная прямая;

4) прямые параллельные данной;

5) прямые пересекающиеся с данной;

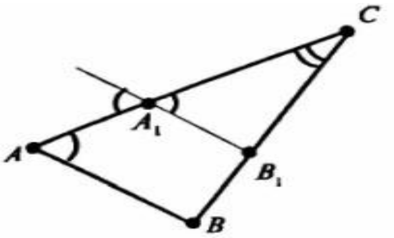
6) прямые скрещивающиеся с данной.

1. Плоскость αпроходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции ABCD – точки M и N.

а) Докажите, что AD || α.

б) Найдите BC, если AD = 10 см, MN = 8 см.

2. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A1, а сторону BC — в точке B1.



Найдите длину отрезка A_1B_1, если AB = 15 см, AA_1: AC = 2 : 3.

3. Через вершину A прямоугольника ABPC проведена прямая *a*, перпендикулярная прямой AC. Докажите, что прямая PC перпендикулярна плоскости прямых *a* и AC.

4. Из точки, не принадлежащей данной плоскости, проведены к ней две наклонные, равные 10 дм и 18 дм. Сумма длин их проекций на плоскость равна 16 дм. Найдите проекцию каждой из наклонных.

5. Через вершину прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена прямая *c*, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между прямыми *c* и AB, если катеты данного прямоугольного треугольника равны 3 дм и 4 дм.

6. Прямые AB и CD перпендикулярны некоторой плоскости. Докажите, что если AC параллельна BD, то четырехугольник ACDB— параллелограмм.

7. Угол *A* параллелограмма *ABCD* равен 30°, *AB*= 4 дм. Через сторону *AD* проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости параллелограмма.

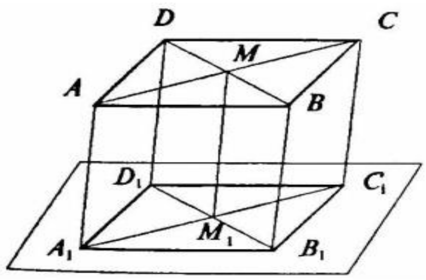
Найдите расстояние между прямой BC и скрещивающейся с ней прямой a, лежащей в плоскости α и проходящей через точку A.

Вариант 2

1. Даны четыре точки C,D,Eи F, не лежащие в одной плоскости. Могут ли пересекаться прямые CE и DF? Ответ поясните.

2. Прямая EF, не лежащая в плоскости ABC, параллельна стороне AB параллелограмма ABCD. Выясните взаимное расположение прямых EF и CD.

3. Даны параллелограмм и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A1, B1, C1 и D1. Найдите длину отрезка DD1, если AA1 = 2 м, BB1 = 3 м, CC1 = 8 м.



4. Через вершину A квадрата ADBC проведена прямая a, перпендикулярная прямой AC. Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости прямых a и AD.

5. Из точки, не принадлежащей данной плоскости, проведены к ней две наклонные, сумма длин которых равна 28 см. Проекции этих наклонных на плоскость равны 6 см и 8 см. Найдите длины наклонных.

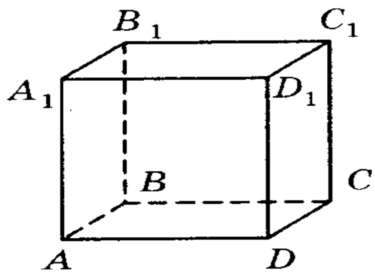
6. Через вершину прямого угла C треугольника BCD проведена прямая с, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между прямыми c и BD, если BD= 25 см, BC= 15 см.

7. Стороны CD и MN четырехугольника CDMN перпендикулярны некоторой плоскости. Докажите, что если CD≠ MN, то четырехугольник CDMN—трапеция.

8. Сторона ромба $ABCD$ равна его диагонали AC=2см. Через сторону AB проведена плоскость P, перпендикулярная плоскости ромба. Найдите расстояние между прямой CD и скрещивающейся с ней прямой a, лежащей в плоскости P и проходящей через точку А.

Вариант 3

1. Дана прямая AB (см. рисунок)



Пользуясь данным рисунком, назовите:

1) плоскость, в которой лежит данная прямая;

2) плоскость, которую пересекает данная прямая;

3) плоскость, которой параллельна данная прямая;

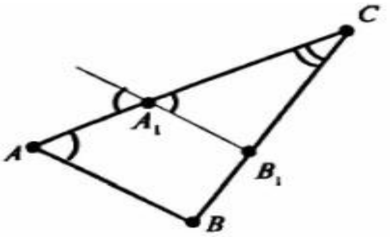
4) прямые параллельные данной;

5) прямые пересекающиеся с данной;

6) прямые скрещивающиеся с данной.

2. Треугольник ABC и трапеция KMNP имеют общую среднюю линию EF, причем KP || MN, EF || AC. а) Докажите, что AC || К Р. б) Найдите KP и MN, если KP : MN = 3 : 5, AC = 16 см.

3. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A1, а сторону BC — в точке B1.



Найдите длину отрезка A1B1, еслиB1C = 10 см, AB : BC = 4 : 5

4. Через вершину A ромба ACBD проведена прямая a, перпендикулярная прямым AB и AD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна плоскости прямых a и AB.

5. Два отрезка длиной 13см и 20смупираются своими концами в параллельные плоскости. Найдите расстояние между этими плоскостями, если разность длин проекций данных отрезков на эти плоскости равна11 см.

6. В плоскости α дана окружность с центром O и радиусом R. Через точку C окружности проведена прямая c, перпендикулярная плоскости α. Прямая a, лежащая в плоскости α, касается данной окружности в точке A. Чему равно расстояние между прямыми a и c, если угол AOC=120°?

7. Плоскость, проходящая через сторону AB четырехугольника ABCP, перпендикулярна прямым AP и BC. Докажите, что если AP = BC, то четырехугольник ABCP— прямоугольник.

8. Через вершину A квадрата $ABCD$ со стороной d проведена плоскость γ, перпендикулярная прямой AC. Докажите, что если расстояние между прямой BD и прямой c, лежащей в плоскости γ, больше $\frac{d}{\sqrt{2}}$, то $BD \| c$.

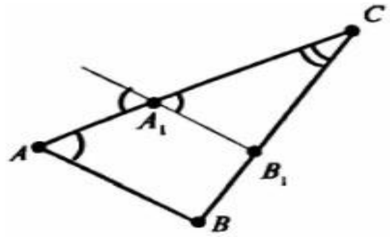
Вариант 4

1. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Могут ли быть параллельными прямые AC и BD? Ответ поясните.

2. В тетраэдре DABCточки K,Еи M– середины ребер AC, DC и BC. Докажите, что плоскость KEMпараллельна плоскости ADB, и вычислите площадь треугольника ADB, если площадь треугольника KEM равна 27 см^2.

3. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A1, а сторону BC — в точке B1.

Найдите длину отрезка A_1B_1, если B_1C = 10 см, AB : BC = 4 : 5.



4. Через вершину B квадрата BCDE проведена прямая b, перпендикулярная прямым BD и BC. Докажите, что прямая CE перпендикулярна плоскости прямых b и BD.

5. Два отрезка длиной 10 дм и 17дм упираются своими концами в параллельные плоскости. Найдите расстояние между этими плоскостями, если сумма длин проекций данных отрезков на них равна 21 дм.

6. В плоскостиβдана окружность с центром O и радиусом R. Через точку D окружности проведена прямая d, перпендикулярная плоскости β. Прямая b, лежащая в плоскости β, проходит через точку O. Чему равно расстояние между прямыми b и d, если угол между прямыми b и OD равен 30°?

7. Плоскость, проходящая через середины сторон CQ и DP четырехугольника CQDP, перпендикулярна прямым, содержащим эти стороны. Докажите, что если CQ=DP, то четырехугольник CQDP — прямоугольник.

8. Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что расстояние между прямой a и любой скрещивающейся с ней прямой b, лежащей в плоскости α, равно расстоянию от прямой a до плоскости α.

Вариант 5

1. Прямая MA проходит через вершину квадрата ABCD и не лежит в плоскости квадрата. а) Докажите, что MA и BC – скрещивающиеся прямые.
б) Найдите угол между прямыми MA и BC, если $\angle$MAD = 45°.

2. Точка M на лежит в плоскости трапеции ABCD (AD ‖ BC).
а) Докажите, что треугольники MAD и MBC имеют параллельные средние линии. б) Найдите длины этих средних линий, если AD : BC = 5:3, а средняя линия трапеции равна 16 см.

3. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны соответственно сторонам ABи ACтреугольника ABC. Выясните, перпендикулярны ли прямые a и b, если: а) AB=8см,BC=6см, AC=10см. б) $\angle$C=120°, $\angle$B=30°.

4. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр AH и наклонная AM, угол между которыми равен φ. Перпендикуляр равен d. Найдите углы треугольника AMH, наклонную и ее проекцию, если d=3 см, φ =60°.

5. Из данной точки к данной плоскости проведены две наклонные и перпендикуляр. Докажите, что если проекции наклонных равны, то равны и наклонные.

6. Через вершину K треугольника DKF проведена прямая KM, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Известно, что KM=15см, DF=12см, DK=FK=10см. Найдите расстояние от точки M до прямой DF.

7. Дан прямоугольный параллелепипед A-D_1. Найдите двугранный угол B_1ADB, если известно, что четырехугольник ABCD – квадрат, AC=$6\sqrt{2}$ см, AB_1=$4\sqrt{3}$ см.

8. Через сторону AD ромба ABCD проведена плоскость ADM так, что двугранный угол BADMравен 60º. Найдите сторону ромба, если $\angle$BAD=45º и расстояние от точки B до плоскости ADMравно $4\sqrt{3}$.

Вариант 6

1. Плоскость α проходит через основание AD трапеции ABCD. M и N – середины боковых сторон трапеции. а) Докажите, что MN $\parallel$ α. б) Найдите AD, если BC = 4 см, MN = 6 см.

2. Прямая CD проходит через вершину треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC. E и F – середины отрезков AB и BC. а) Докажите, что CD и EF – скрещивающиеся прямые. б) Найдите угол между прямыми CD и EF, если $\angle$ DCA = 60°.

3. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны соответственно сторонам ABи ACтреугольника ABC.Выясните, перпендикулярны ли прямые a и b, если: а) AB=12см,BC=5см, AC=13см. в) $\angle C=60°$, $\angle B=30°$.

4. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр AH и наклонная AM, угол между которыми равен φ. Перпендикуляр равен d. Найдите все углы треугольника AMH, наклонную и ее проекцию, если d=6 см, $\varphi=45°$.

5. Из данной точки к данной плоскости проведены две наклонные и перпендикуляр. Докажите, что наклонные равны, если углы между перпендикуляром и наклонными равны.

6. Через вершину прямого угла C равнобедренного треугольника CDE проведена прямая CF, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Найдите расстояние от точки Fдо прямой DE. Известно, что CF=35см, CD=12 $\sqrt{2}$ см.

7. Дан прямоугольный параллелепипед A-D_1. Найдите двугранный угол A_1DCA, если AC=13см, DC=5см, $AA_1=12\sqrt{3}$ см.

8. Через сторону AD ромба ABCD проведена плоскость ADM так, что двугранный угол BADMравен 60º. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD=45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADMравно $2\sqrt{3}$.

Содержание отчета:

1 Тема и цель.

2 Решение заданий с подробным решением и с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Как могут пересекаться прямые?

2 Какие случаи пересечения прямой и плоскости Вы знаете?

3 Какие случаи пересечения плоскостей Вы знаете?

4 Какая фигура называется двугранным углом?

3.6 Практическая работа № 6

«Комбинаторные задачи. Формула бинома Ньютона, треугольник Паскаля»

Учебная цель:

формировать умение рассчитывать количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, из элементов конечного множества любой природы, умение использовать формулу Ньютона.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите подробное решение письменно в тетради с указанием ответов.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию лабораторной работы:

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучается задача выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задача о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества.

Для любого натурального числа n произведение 1.2…..n обозначается n! (читается «n факториал»), т.е. 1.2…..n = n!.

Кроме того полагают О!=1, 1!=1.

Другими словами: $n\,! = \begin{cases} 1, если & n = 0 \\ 1, если & n = 1 \\ 1.2...n, если, n \in N, n \geq 2 \end{cases}$

Например: $1!=1$

$2!=1\cdot 2=2$

$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

$4!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

………

$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=720\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=720\cdot 5040=3628800$

Перестановками называются комбинации, составленные из n различных элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения этих элементов.

Число перестановок: $P_n = n!$, где

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n, \qquad 0! = 1$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга по составу хотя бы одним элементом.

Число сочетаний: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком расположения этих элементов.

Число размещений: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Число перестановок, сочетаний и размещений связаны между собой формулой:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Замечание. Выше предполагалось, что все элементы множества различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются *по другим формулам*.

Числа C_n^m обладает целым рядом замечательных свойств:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$

2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

3) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

Последнее тождество позволяет вычислить значения C_n^m, зная C_{n-1}^m и C_{n-1}^{m-1}. Иными словами, с помощью этого тождества можно последовательно вычислить C_n^m сначала при n=0, затем при n=1, при n=2 и т.д.

Вычисления удобно записывать в виде треугольной таблицы Паскаля:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Другими словами, мы имеем таблицу:

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \; C_1^1 \\
\searrow \quad \swarrow \\
C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2 \\
\searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \\
C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^2 \; C_3^3 \\
\searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \\
C_4^0 \; C_4^1 \; C_4^2 \; C_3^3 \; C_4^4 \\
\searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \quad \searrow\swarrow \\
C_5^0 \; C_5^1 \; C_5^2 \; C_5^3 \; C_5^4 \; C_5^5
\end{array}$$

Для любых чисел $(x+a)^1 = x + a = C_1^0 x^1 a^0 + C_1^1 x^0 a^1$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = C_2^0 x^2 a^0 + C_2^1 x^1 a^1 + C_2^2 x^0 a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 = C_3^0 x^3 a^0 + C_3^1 x^2 a^1 + C_3^2 x^1 a^2 + C_3^3 x^0 a^3$$

Биномом Ньютона для любого натурального n верно:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^m x^{n-m} a^m + \dots C_n^n x^0 a^n$$

Свойства разложения бинома:

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т.е. равно $n+1$.
2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома, т.е. $(n-m)+m=n$.
3. Общий член разложения (обозначим его T_{m+1}) имеет вид

   $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} a^m$, $m = 0, 1, \dots, n$.

   При этом Т обозначает член разложения, а индекс $m+1$ – его порядковый номер в разложении бинома, считая слева направо.

   Например, найдем шестой член разложения $(x+a)^n$: $T_6 = C_n^5 x^{n-5} a^5$
4. Биноминальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой, т.к. $C_n^m = C_n^{n-m}$
5. Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, т. к. $2^n = (1+1)^n =$ $= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots C_n^n$ (по биному Ньютона при $x=1$ и $a=1$).

Пример 6.1. Составить различные перестановки из элементов множества А = *{2,7,8}*.Подсчитать их число.

Решение. Из элементов данного множества можно составить следующие перестановки: *(2,7,8); (2,8,7); (7,2,8); (7,8,2); (8,2,7); (8,7,2).* Их число – есть число перестановок из трех элементов: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Пример 6.2. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества *A* = *{a,b,c}*.Подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: *(a,b); (a,c); (b,c)*. Их число есть число сочетаний из трех различных элементов по два элемента: $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1\cdot} = 3$

Пример 6.3. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $A = \{a,b,c\}$.Подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: *(a,b); (b,a); (a,c);(c,a); (b,c);(c,b)*.Их число – есть число размещений из трех элементов по два: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1} = 6$.

Пример 6.4. Упростить выражение В= $\frac{7!\cdot4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!\cdot5!}-\frac{9!}{2!\cdot7!}\right)$.

Решение.

$$В= \frac{7!\cdot4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!\cdot5!}-\frac{9!}{2!\cdot7!}\right) = \frac{\cancel{7!}\cdot1\cdot\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}{\cancel{7!}\cdot\cancel{8}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot10}\left(\frac{\cancel{5!}\cdot\cancel{6}\cdot7\cdot8}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5!}}-\frac{\cancel{7!}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot9}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{7!}}\right) = \frac{1}{30}(56-30) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Итак, В=$\frac{2}{3}$.

Пример 6.5. Упростить выражение Д=$\frac{5!}{m(m+1)}\cdot\frac{(m+1)!}{(m-1)!\cdot3!}$

Решение. Д= $\frac{\cancel{3!}\cdot4\cdot5\cdot\cancel{(m-1)!}\cdot\cancel{m}\cdot\cancel{(m+1)}}{\cancel{m}\cdot\cancel{(m+1)}\cdot\cancel{(m-1)!}\cdot\cancel{3!}} = 20$, Д=20.

Пример 6.6. Решить уравнение относительно натуральногоm:

$$\frac{m!-(m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6}$$

Решение. $\frac{m!-(m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(m-1)!m-(m-1)!}{(m-1)!m(m+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(m-1)!(m-1)}{(m-1)!m(m+1)} = \frac{1}{6}$

а) Если m=1 , то согласно уравнению будем иметь:

$$\frac{0!\cdot0}{0!\cdot1\cdot2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1\cdot0}{1\cdot1\cdot2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{0}{2} = \frac{1}{6};$$

Значит, m=1не является корнем заданного уравнения.

б) Если m≥2, то согласно уравнению будем иметь:

$$\frac{(m-1)!(m-1)}{(m-1)!m(m+1)}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{m-1}{m(m+1)}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6(m-1)=m(m+1)\Rightarrow 6m-6=m^2+m\Rightarrow$$

$$m^2-5m+6=0\Rightarrow(m-2)(m-3)=0\Rightarrow m_1=2, m_2=3$$

Итак, исходное уравнение имеет два натуральных корня: $m_1=2, m_2=3$

Пример 6.7. Упростить выражение: $M=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}, n\geq 6, n\in N$

Решение.

$$A_n^6=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),$$

$$A_n^5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

$$A_n^4=n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$M=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5+1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=(n-4)(n-4)=(n-4)^2,$$

Итак $M=(n-4)^2$

Пример 6.8. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить: $(a+в)^4$.

Решение.

$$(a+в)^4=C_4^0a^4в^0+C_4^1a^3в^1+C_4^2a^2в^2+C_4^3a^1в^3+C_4^4a^0в^4=$$
$$\frac{4!}{0!4!}a^4+\frac{4!}{1!3!}a^3в+\frac{4!}{2!2!}a^2в^2+\frac{4!}{3!1!}aв^3+\frac{4!}{4!0!}в^4=a^4+4a^3в+6a^2в^2+4aв^3+в^4$$

Пример 6.9. Найти сумму коэффициентов многочлена относительно x, получаемого в разложении бинома Ньютона: $(3x-4)^{17}$.

Решение.

$$(3x-4)^{17}=C_{17}^0(3x)^{17}(-4)^0+C_{17}^1(3x)^{16}(-4)^1+C_{17}^2(3x)^{15}(-4)^2+C_{17}^3(3x)^{14}(-4)^3+$$
$$+\cdots+C_{17}^{17}(3x)^0(-4)^{17}.$$

Это равенство истинно при любом значении x, в частности, при $x=1$.
Тогда вправе иметь:

$$C_{17}^{0}3^{17}(1)^{17}+C_{17}^{1}3^{16}1^{16}(-4)+C_{17}^{2}3^{15}1^{15}(-4)^{2}+\cdots+C_{17}^{17}(-4)^{17}=$$
$$C_{17}^{0}3^{17}-4\cdot 3^{16}C_{17}^{1}+16\cdot 3^{15}C_{17}^{2}+\cdots+-4^{17}\cdot C_{17}^{17}$$

сумма коэффициентов многочлена, получаемого в разложении бинома.

Влево имеем: $(3-4)^{17}=(-1)^{17}=-1$.Следовательно, искомая сумма коэффициентов равна -1.

Пример 6.10. Найти 13-й член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

Решение.

$$T_{13}=T_{12+1}=C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3}\left(\sqrt{2}\right)^{12}=C_{5}^{3}\cdot 3\cdot 2^{6}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}\cdot 3\cdot 2^{6}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^{6}=87360$$

Итак, $T_{13}=87360$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Сколько различных двухзначных чисел можно составить из цифр 5,6,7,8, если цифры в числе не повторяются?

2. Сколькими способами можно расположить 5 различных книг на полке?

3. Из группы в 25 человек требуется отобрать 5 представителей для участия в конференции. Сколькими способами можно это сделать?

4. Вычислите: $\frac{3!+4!}{5}$; $\frac{A_{12}^{4}-A_{11}^{4}}{A_{10}^{3}}$.

5. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить $\left(b+\sqrt{2}\right)^{6}$.

Вариант 2

1. Сколькими способами из группы десятерых независимых экспертов можно выбрать троих для наблюдения за подсчетом голосов на выборах?

2. Сколько различных четырехзначных телефонных номеров можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6, если цифры в номере не должны повторяться?

3. Сколькими способами можно рассадить шесть старичков на лавочке?

4. Вычислить $\frac{7!}{3!-5!}$; $\frac{A_{12}^{6}\cdot 5!}{A_{11}^{9}}$.

5. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить $(a-2b)^5$.

Вариант 3

1. Сколькими способами можно расположить четыре цветка на подоконнике?

2. Сколькими способами может расположиться на пьедестале тройка лидеров из 10 претендентов, если каждый из них может занять призовое место?

3. Сколькими способами из семи победительниц региональных конкурсов красоты можно отобрать двоих для работы в качестве ведущих телешоу?

4. Вычислите $\frac{5!+4!}{3!}$; $\frac{A_5^2+A_6^3}{A_3^2-A_4^3}$.

5. Напишите разложение по формуле бинома Ньютона и упростить:

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^{13}$.

Вариант 4

1. Сколькими способами можно сформировать для участия в эстафете команду из 4 человек из коллектива в 24 человека?

2. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9, если цифры в числе не должны повторяться?

3. Сколькими способами можно поставить 6 певцов вокального ансамбля вдоль сцены?

4. Вычислите $\frac{99!-98!}{97!}$; $\frac{A_{10}^{4}}{A_6^3+A_7^6}$.

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^7$.

Вариант 5

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2,5,7,8, если цифры в числе не повторяются?

2. В группе студентов еженедельно проводится 20 различных занятий (пар). Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 занятия (пары)?

3. От команды – победительницы городского турнира нужно выдвинуть двоих представителей для участия в церемонии награждения. Сколькими способами это можно сделать, если команда состояла из 10 человек?

4. Вычислите $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!};\frac{A_{11}^2+A_{10}^3}{A_{11}^3}$.

5.Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $(1+\sqrt{2})^5$.

Вариант 6

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4, если цифры в числе не повторяются?

2. Сколькими способами можно расположить 4 цветочных горшка на подоконнике?

3. Из группы в 15 человек требуется отобрать трех представителей для участия в конференции. Сколькими способами можно это сделать?

4. Вычислите $\frac{(m+2)!}{m!};A_{10}^5\left(2!A_{11}^7+3!\cdot A_{10}^6\right)$.

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $(1-\sqrt{2})^5$.

Вариант 7

1. Сколькими способами из группы восьми независимых экспертов можно выбрать четверых для наблюдения за подсчетом голосов на выборах?

2. Сколько различных трехзначных телефонных номеров можно составить из цифр 6,7,8,9, если цифры в номере не должны повторяться?

3. Сколькими способами можно рассадить шесть малышей на лавочке?

4. Вычислите $\left(A_3^2 + A_4^2\right) \cdot 5!; \frac{60!}{58!} - \frac{40!}{38!}$.

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $(a + 2b)^6$.

Вариант 8

1. Сколькими способами можно расположить пять различных книг на книжной полке?

2. Сколькими способами может расположиться на пьедестале тройка лидеров из 10 претендентов, если каждый из них может занять призовое место?

3. Сколькими способами из восьми победителей отборочных туров может сформироваться четверка лидеров для выхода в полуфинал?

4. Вычислите $\left(A_5^3 - A_5^2\right)\frac{1}{12}; \frac{105! - 102!}{101!}$.

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $\left(3 - \sqrt{2}\right)^5$.

Вариант 9

1. Сколькими способами можно выбрать трех человек для участия в конкурсе из коллектива в 20 человек?

2. Сколько различных трехзначных номеров можно составить из цифр 2,4,6,8, если цифры в числе не должны повторяться?

3. В комнате три шкафа. Требуется поставить их вдоль одной стены. Сколькими способами это можно сделать.

4. Вычислите

$$\left[\frac{1}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}\right](m+1)!;\ \frac{A_9^5}{A_8^3+A_8^7}.$$

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $\left(\sqrt{6}+\sqrt{12}\right)^4$.

Вариант 10

1. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 3,4,5,6, если цифры в числе не повторяются?

2. В институте еженедельно проводятся консультации по 10 различным предметам. Сколькими способами можно составить расписание консультаций в субботу, если в этот день должны быть проведены консультации по 5 предметам?

3. От коллектива преподавателей необходимо выдвинуть 14 человек для проведения агитационной работы по поступлению в Вуз. Сколькими способами это можно сделать, если коллектив состоит из 30 человек?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$\frac{n!+(n-1)!}{(n+1)!}=6$, $C_n^5<C_n^3$.

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $(1+2x)^5$.

Вариант 11

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9, если цифры в числе не повторяются?

2. Сколькими способами можно распределить варианты для выполнения лабораторной работы в группе из 15 человек (в работе 15 вариантов)?

3. Из группы в 20 человек требуется отобрать четверых для распространения агитационных материалов. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$A_n^3 = A_n^2$

5. Докажите тождество $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

6. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля $\left(x + \dfrac{1}{2x}\right)^8$.

Вариант 12

1. Сколькими способами из группы 10 девушек можно выбрать троих для работы в службе сервиса по приему гостей на торжественном мероприятии?

2. Сколько различных двухзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7, если цифры в числе не повторяются?

3. Сколькими способами можно расположить вряд 5 картин на стене?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$\dfrac{(n+2)!}{n!} = 3 + 4n$, $3C_{n+1}^2 - 2A_n^2 = n$.

6. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти используя треугольник Паскаля $\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$.

Вариант 13

1. Сколькими способами может расположиться очередь из четырех человек?

2. Сколькими способами может расположиться на пьедестале тройка лидеров из 5 спортсменов, если каждый из них может занять призовое место?

3. Сколькими способами можно выбрать четверых человек для участия в конкурсе из коллектива в 15 человек?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$$\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 5,\quad C_n^{n-2} + 2n = 9.$$

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти используя треугольник Паскаля $\left(\frac{1}{x} - y\right)^6$.

Вариант 14

1. Сколькими способами из 10 команд, победивших в региональных отборочных турах, может сформироваться четверка лидеров для выхода в полуфинал?

2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9, если цифры в числе не повторяются?

3. В кабинете три стенда. Требуется разместить их в одну линию на одной стене. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию: $\frac{(n+1)!+n!}{n!} = 7$

5. Вычислите $\dfrac{\left(\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}\cdot C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3\right)}{P_3 A_5^3}$.

6.Найти два средних члена разложения $\left(a^3 + ab\right)^{31}$.

Вариант 15

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2,3,4,5,6, если цифры в числе не повторяются?

2. В группе еженедельно проводится 19 «пар» по различным предметам. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должно быть проведено 3 «пары»?

3. От коллектива преподавателей необходимо выдвинуть 15 человек для проведения агитационной работы по поступлению в Вуз. Сколькими способами это можно сделать, если коллектив состоит из 20 человек?

4. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию $A_n^4 = A_n^2$

5. Вычислить $C_5^3 \cdot C_4^2 + C_4^2 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_3^0$.

6. Найти два средних члена разложения $\left(a^3 + ba\right)^{19}$.

Содержание отчета:

1 Тема и цель.

2 Решение заданий с подробным решением и с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1. Что изучает комбинаторика?
2. Что такое соединение из n элементов по m?
3. Что такое размещение?
4. По какой формуле вычисляется число размещений из n по m? Как обозначается это число?
5. Что такой $n!$?

3.7 Практическая работа №7
«Декартова система координат в пространстве. Уравнения окружности, сферы»

Учебная цель:

формировать пространственное мышление, умение построения точек в пространстве и вычислять расстояние меду точками.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Декартова прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*(Рисунок 10.1). Оси координат пересекаются в точке О, которая называется *началом координат*, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей. Ось *Ox* называется осью абсцисс (или просто абсциссой), ось *Oy* – осью ординат (ординатой), ось *Oz* – осью аппликат (аппликатой).

Плоскость, проходящая через любую пару координатных осей, называется *координатной плоскостью*. В пространстве три координатные плоскости *Oxy*, *Oyz*, *Oxz*, которые делят пространство на восемь частей (октантов).

Положение точки А в пространстве определяется тремя координатами x, y и z. Координата x равна длине отрезка ОВ, координата y — длине отрезка ОС, координата z — длине отрезка OD в выбранных единицах измерения. Отрезки ОВ, ОС и OD определяются плоскостями, проведёнными из точки A параллельно плоскостям Oyz, Oxz и Oxy соответственно.

Координата x называется абсциссой точки А, координата y — ординатой точки А, координата z — аппликатой точки А. Символически это записывают так:

$$\mathrm{A}(x, y, z)$$

или привязывают запись координат к конкретной точке с помощью индекса:

$$(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$$

и т. п.

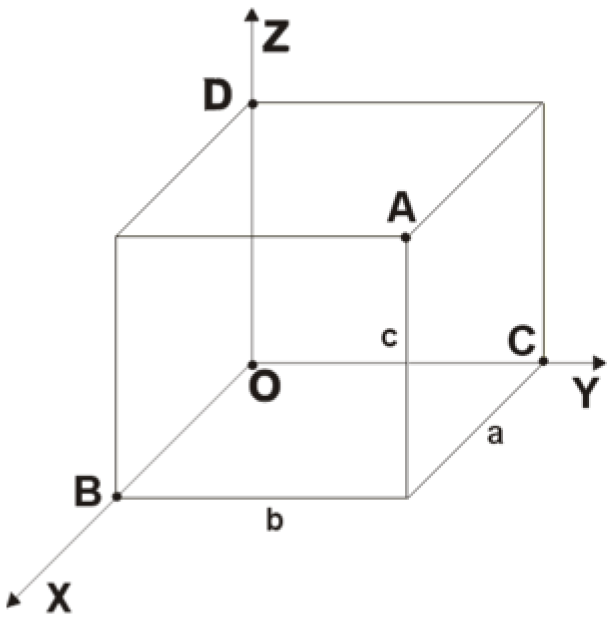


Рисунок 7.1

Каждая ось рассматривается как числовая прямая, т. е. имеет положительное направление, а точкам, лежащим на отрицательном луче, приписываются отрицательные значения координаты (расстояние берется со знаком минус). То есть, если бы, например, точка В лежала не как на рисунке — на луче Ox, а на его продолжении в обратную сторону от точки О (на отрицательной части оси *Ox*), то абсцисса *x* точки А была бы отрицательной (минус расстоянию ОВ). Аналогично и для двух других осей.

Координатные оси *Ox, Oy, Oz*, изображенные на Рисунке 7.1, образуют правую систему координат. Это означает, что если смотреть на плоскость *yOz* вдоль положительного направления оси *Ox*, то движение оси *Oy* в сторону оси *Oz* будет проходить по часовой стрелке. Эту ситуацию можно описать при помощи правила буравчика: если буравчик (винт с правой резьбой) вращать по направлению от оси *Oy* к оси *Oz*, то он будет двигаться вдоль положительного направления оси *Ox*. Существует и левая система координат (Рисунок 7.2).

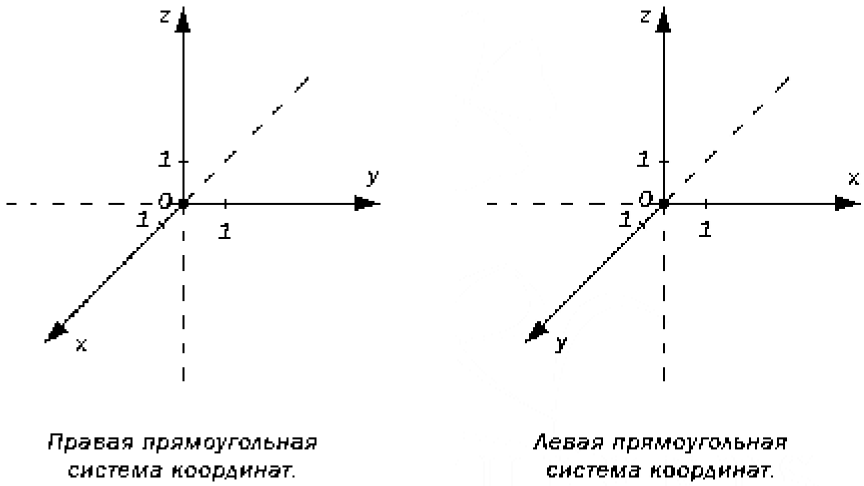
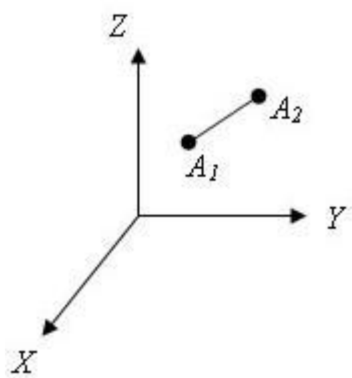


Рисунок 7.2

Есть две произвольные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$, тогда расстояние между точками A_1 и A_2 вычисляется по формуле:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7.1)$$



Например, найти расстояние между точками$A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(-7;\ -2;\ 4)$. По формуле (7.1) найдем длину отрезка AB:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-7-1)^2 + (-2-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9.$$

Сфера – это совокупность вех точек в трехмерном пространстве, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной данной точки, называемой *центром сферы*. Одинаковое расстояние от центра сферы к любой точке сферы называется *радиусом сферы.*

Пусть дан центр сферы – точка $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиус сферы R.

Обозначим любую (текущую) точку сферы - $M(x, y, z)$.

Тогда по определению сферы AM=R. Найдем расстояние AM по формуле (7.1)

$$\mathrm{AM} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

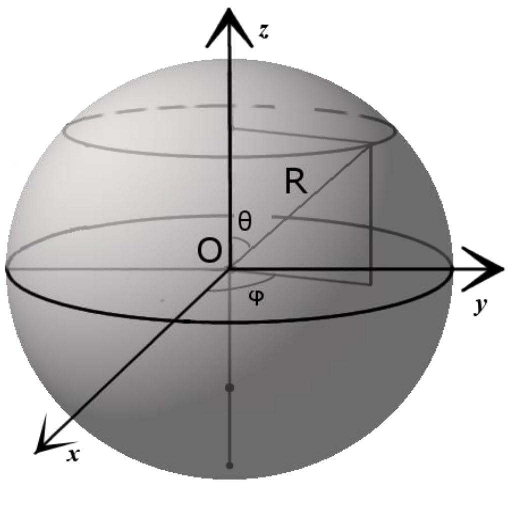
или, возведя в квадрат, получим

$$\boldsymbol{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}\ \text{-}$$

уравнение сферы с центром в точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиуса R.

В частности, уравнение сферы с центром в начале координат и радиуса R записывается в виде

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}.$$



Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Построить точки с данными координатами (Таблица 1).

Таблица 1

Вариант	***A***	***B***	***C***	**Вариант**	***A***	***B***	***C***
1	(3,4,0)	(0,0,-1)	(1,-7,4)	**14**	(-3,3,2)	(0,2,-5)	(0,-6,0)
2	(0,-4,-5)	(2,3,6)	(5,0,0)	**15**	(-2,6,-4)	(-3,0,7)	(-5,0,0)
3	(-3,0,5)	(0,-3,0)	(-2,-4,7)	**16**	(-2,-1,0)	(7,3,-4)	(0,-3,0)
4	(3,-2,0)	(5,-4,-5)	(0,0,6)	**17**	(0,3,4)	(6,7,5)	(1,1,0)
5	(0, 2,5)	(8,-3,4)	(0,-4,0)	**18**	(-4,3,-5)	(0,-2,2)	(-7,4,0)
6	(3,0,-2)	(-2,-5,7)	(0,9,0)	**19**	(3,1,-4)	(2,0,0)	(1,0,-7)
7	(6,-4,0)	(3,-7,5)	(11,0,0)	**20**	(3,-4,5)	(0,0,-3)	(0,5,2)
8	(2,1,-3)	(-7,0,0)	(0,-4,3)	**21**	(-3,0,-5)	(4,3,1)	(0,4,0)
9	(0, 3,-4)	(-6,7,2)	(0,-9,0)	**22**	(3,2,0)	(1,-5,4)	(0,-6,0)
10	(4,-5,2)	(0,2,2)	(0,0,-4)	**23**	(0,2,-5)	(3,-4,5)	(-4,0,0)
11	(-3,4,-2)	(-2,-1,0)	(6,0,0)	**24**	(0,-3,0)	(-2,0,5)	(6,1,-3)
12	(4,0,-5)	(0,-3,0)	(5,-2,4)	**25**	(-6,4,3)	(0,0,7)	(0,1,-2)
13	(3,5,0)	(-4,-3,6)	(0,0,-4)	Будьте внимательны!			

Задание 2. Даны точки A, B, C (Таблица 1). Найдите точки симметричные относительно

а) начала координат,

б) координатных плоскостей,

в) координатных осей.

Задание 3. Даны точки A, B, C (Таблица 1). Найдите расстояния от данных точек до начала координат, до координатных плоскостей.

Задание 4. Дан параллелограмм *ABCD*, три вершины которого заданы (Таблица 2). Найдите четвертую вершину. Вычислите длины сторон данного параллелограмма.

Таблица 2

Вариант	*A*	*B*	*C*	Вариант	*A*	*B*	*C*
1	(-1,-2,3)	(-4,1,2)	(5,2,7)	**14**	(-3,5,-4)	(-5,6,2)	(3,-5,-2)
2	(1,2,3)	(3,-4,-2)	(-4,-3,2)	**15**	(2,-3,4)	(6,-4,-5)	(-3,4,-2)
3	(2,-3,-1)	(-3,5,3)	(4,3,-4)	**16**	(5,-2,-4)	(-5,-8,-1)	(-2,4,-3)
4	(3,-4,2)	(-5,2,-3)	(-1,7,-2)	**17**	(-3,-2,-5)	(-4,-5,3)	(2,3,4)
5	(-5,2,4)	(-3,-4,2)	(6,-3,-3)	**18**	(2,6,-3)	(-5,-2,-4)	(-3,-5,1)
6	(-4,-3,5)	(2,-5,6)	(-2,3,-5)	**19**	(3,-1,-2)	(2,-4,1)	(7,5,2)
7	(4,2,-3)	(-5,6,-4)	(-2,-3,4)	**20**	(3,1,2)	(-2,3,-4)	(2,-4,-3)
8	(-4,5,-2)	(-1,-5,-8)	(3,-2,4)	**21**	(-1,2,-3)	(3,-3,5)	(-4,4,3)
9	(-5,-3,-2)	(3,-4,-5)	(4,2,3)	**22**	(2,3,-4)	(-3,-5,2)	(-2,-1,7)
10	(-3,2,6)	(-4,-5,-2)	(1,-3,-5)	**23**	(4,-5,2)	(2,-3,-4)	(-3,6,-3)
11	(-2,3-1)	(1,2,-4)	(2,7,5)	**24**	(5,-4,-3)	(6,2,-5)	(-5,-2,3)
12	(2,3,1)	(-4,-2,3)	(-3,2,-4)	**25**	(-3,4,2)	(-4,-5,6)	(4,-2,-3)
13	(-3,-1,2)	(5,3,-3)	(3,-4,4)	**26**	(-2,-4,5)	(-8,-1,-5)	(4,3,-2)

Задание 5. Построить

а) окружность по заданному уравнению,

б) сферу по данным условиям, написать уравнение сферы (Таблица 3).

Таблица 3

Вари ант	Уравнения	Вари ант	Уравнения
1	а)$(x-2)^2+(y-3)^2=9;$ б) центр сферы в точке (0,3,0), радиус равен 4.	14	а)$(z-3)^2+(y+2)^2=9;$ б)Центр сферы в точке (5,0,0), радиус равен 4.
2	а)$(x+3)^2+(z-5)^2=4;$ б) Центр сферы в точке (0,0,5), радиус равен 1.	15	а)$(x-5)^2+(y+3)^2=4;$ б) Центр сферы в точке (0,2,0), радиус равен 3.
3	а)$(x+1)^2+(y-2)^2=16$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (1,1,0).	16	а)$(x+1)^2+(y+1)^2=16$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (0,0,-4).
4	а)$(x-3)^2+(y+4)^2=25$ б) Центр сферы в точке (0,-3,0), радиус равен 3.	17	а)$(x+4)^2+(y-3)^2=25$ б) Центр сферы в точке (0,0,1), радиус равен 2.
5	а)$(x+3)^2+(y+3)^2=4$ б) Радиус сферы равен 4, центр в точке (1,0,1).	18	а)$(x-3)^2+(y-3)^2=4$ б) радиус сферы равен 4, центр в точке (0,1,1).
6	а)$(x-1)^2+(y+1)^2=1$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (0,0,-4).	19	а)$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (0,-4,1).
7	а)$(x+2)^2+(y-1)^2=36$ б) Радиус сферы равен 3, центр в точке (0,-3,0).	20	а)$(x-1)^2+(y+2)^2=36$ б) Радиус сферы равен 3, центр в точке (3,0,0).
8	а)$(x-4)^2+(y+2)^2=49$ б) Радиус сферы равен 4, центр в точке (1,0,0).	21	а)$(x+2)^2+(y-4)^2=49$ б) Радиус сферы равен 4, центр в точке (0,-2,0).
9	а)$(x+4)^2+(y-4)^2=9$ б) Радиус сферы равен 5, центр в точке (0,5,0).	22	а)$(x-4)^2+(y+4)^2=9$ б)Радиус сферы равен 5, центр в точке (0,0,-5).
10	а)$(x-5)^2+(y+1)^2=4$ б) Радиус сферы равен 6,	23	а)$(x+1)^2+(y-5)^2=4$ б) Радиус сферы равен 4,

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
	центр в точке (0,0,0).		центр в точке (-4,0,0).
11	а)$(x+5)^2+(y-6)^2=16$ б) Радиус сферы равен 3, центр в точке (1,0,0).	24	а)$(x-6)^2+(y+5)^2=16$ б) Радиус сферы равен 3, центр в точке (0,3,0).
12	а)$(x-1)^2+(y+5)^2=1$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (0,0,-2).	25	а)$(x+5)^2+(y-1)^2=1$ б) Радиус сферы равен 2, центр в точке (2,0,0).
13	а)$(x+1)^2+(y-3)^2=25$; б)Радиус сферы равен 1, центр (1,1,0).		

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1Как построить прямоугольную систему координат на плоскости?

2 Назовите координатные оси в пространстве.

3 По какой формуле определяется расстояние между двумя точками в пространстве?

4 Что называется сферой? Объясните уравнение сферы.

3.8 Практическая работа № 8
«Векторы. Действия над векторами»

Учебная цель:

формировать умения выполнять действия над векторами в пространстве.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

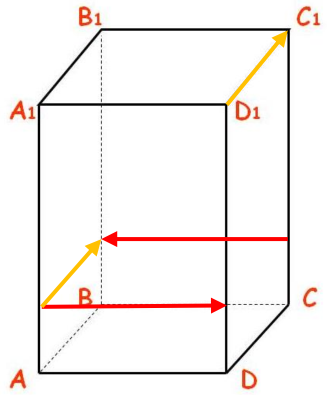
Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Вектор – это направленный отрезок. Характеризуется направлением и длиной.

Два вектора бывают: коллинеарными, сонапраленными, противоположно направленными, равными.

Пример 8.1. В прямоугольном параллелепипеде отмечены ра$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D_1C_1}$. Найти среди них коллинеарные, сонаправленные, противоположно направленные и равные.

Решение.



1. Коллинеарные: $\overrightarrow{AD} и \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} и \overrightarrow{D_1C_1}$.
2. Сонаправленные: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{D_1C_1}$.
3. Противоположно направленные: $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$.
4. Равные: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{D_1C_1}\right|$.

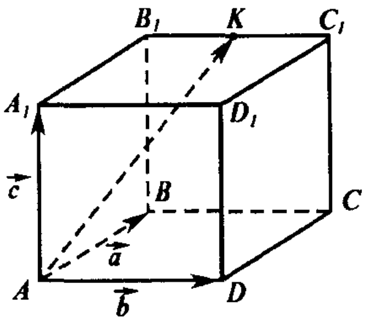
Пример 8.2. Упростить выражение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{KF}.$

Решение.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{KF}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KF}=\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BK}\right)+\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{DF}.$$

Пример 8.3. В кубе ABCD$A_1B_1C_1D_1$ точка k - середина B_1C_1 . Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$повекторам$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$и$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}.$

Решение.



Представим вектор $\overrightarrow{AK}$ в виде суммы следующих векторов:

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1K}.$$

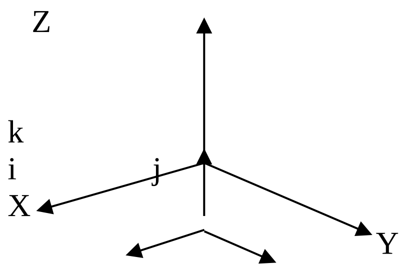
заменимвектор$\overrightarrow{BB_1}$навектор$\overrightarrow{AA_1}$, т. коннравны,

авектор$\overrightarrow{B_1K}$навектор$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, т. к. $B_1K=\frac{1}{2}AD.$

Тогда получим $\overrightarrow{AK}=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}.$

Координаты вектора

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



Действия над векторами, заданными координатами

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$

$\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$

$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$

$\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\}$

$\alpha\vec{a}=\{\alpha x_1;\alpha y_1;\alpha z_1\}$

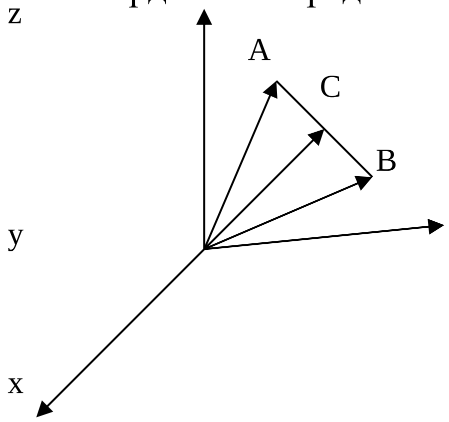
Координаты середины

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}$$



Длина вектора

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Скалярное произведение двух векторов.

По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$

Если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$, то

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Вычисление косинуса угла между двумя векторами

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|a|\cdot|b|}$$

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}}}$$

Направляющие косинусы

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами $\alpha;\beta;\gamma$, образованными им с осями координат Ox; Oy; Oz.

$$\cos\gamma=\frac{az}{a}=\frac{az}{\sqrt{ax^2+ay^2+az^2}}\quad \cos\alpha=\frac{ax}{a}=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+ay^2+az^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{ay}{a}=\frac{ay}{\sqrt{ax^2+ay^2+az^2}}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и

ра$\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{A_1C}$. Найдите среди них:

а) Коллинеарные;

б) Сонаправленные;

в) Противоположно направленные;

г)Равные.

2. Упростить выражение:$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$.

3. Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найти число k, если:$\overrightarrow{OB_1}$=k· $\overrightarrow{B_1D}$.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N середины AB и A_1D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{MD}$по$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5. Точка К – середина ребра ВС тетраэдра ABCD. Разложите вектор

$\overrightarrow{DK}$по$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

6. Найти длину $\vec{b} = 10\vec{i} - 15\vec{j} - 30\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

7. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

8. При каких Р векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - p\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - p\vec{k}$ перпендикулярны.

Вариант 2

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и

ра$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{B_1A_1}$. Найдите среди них:

а) Коллинеарные;

б) Сонаправленные;

в) Противоположно направленные;

г)Равные.

2. Упростить выражение:$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

3. Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найти число k, если:$\overrightarrow{OC_1}$=k· $\overrightarrow{OA}$.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N середины AB и A_1D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{NC_1}$по$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5. Основанием пирамиды является параллелограмм ABCD. Точка O является вершиной пирамиды. Разложите вектор $\overrightarrow{OD}$по$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

6. Найти длину $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и его направляющие косинусы.

7. Найти скалярное произведение векторов$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

8. При какихМ векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 4\vec{i} - m\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что понимают под модулем вектора?

2 Какие действия можно совершать с векторами?

3 Какие векторы называются коллинеарными?

4 Дайте определение скалярного произведения векторов?

5 Как определяются координаты вектора в пространстве?

6 Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

7 Постройте три перпендикулярных вектора.

3.9 Практическая работа № 9

«Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения»

Учебная цель:

формировать умения преобразовывать тригонометрические выражения с использованием основных тригонометрических тождеств и формул сложения.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Основные тригонометрические тождества задают связь между синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом одного угла. Получают их из определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса и понятия единичной окружности. Они позволяют выразить тригонометрическую функцию через любую другую.

$$sin^2x+cos^2x = 1$$

$$tg\,x = \frac{\sin x}{cosx}$$

$$ctg\,x = \frac{\cos x}{sinx}$$

$$tg\,x \cdot ctgx = 1$$

$$1 + tg^2\,x = \frac{1}{cos^2x}$$

$$1 + ctg^2\,x = \frac{1}{sin^2x}$$

Угол α –поворот против часовой стрелки по единичной окружности, а –α – поворот по часовой стрелке. Тогда можно записать следующие равенства

$$sin\,(-\alpha)= -\,sin\alpha$$

$$cos\,(-\alpha)=cos\alpha$$

$$tg\,(-\alpha)= -\,tg\alpha$$

$$ctg\,(-\alpha)= -\,ctg\alpha$$

Например, $sin\,(-60^0)= -\,sin\,60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$tg^3(-45^0)=\left(tg(-45^0)\right)^3=(-tg45^0)^3=(-1)^3=-1$$

Формулы сложения это тригонометрические равенства, связанные с суммами и разностями углов.

$$\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta-sin\alpha\cdot sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha\cdot sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Например, вычислим $cos15^0=\cos(60^0-45^0)=cos60^0\cdot cos45^0+sin60^0\cdot sin45^0=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислите значения косинуса, тангенса, котангенса, если $sin\alpha=-0{,}6$, $\alpha\epsilon(\pi;\,3\pi/2)$.

2. Упростите выражения.

$$\text{а)}\ \frac{tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\frac{ctg^2\alpha-1}{ctg\,\alpha},$$

б) $sin^2\alpha : \left(\frac{1}{cos^2\alpha} - 1\right) + cos^2\alpha : \left(\frac{1}{sin^2\alpha} - 1\right)$,

в) $\frac{\cos(\alpha - \pi) \cdot \sin(4\pi - \alpha) \cdot ctg(\alpha + \frac{\pi}{2})}{ctg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin(7\pi + \alpha)}$,

г) $\frac{tg\,\frac{\pi}{9} + tg\,\frac{5\pi}{36}}{1 - tg\,\frac{5\pi}{36} \cdot tg\,\frac{\pi}{9}}$.

3. Вычислите значение выражения.

а) $sin^3\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$,

б) $cosy - \cos(60^0 - y) - \cos(60^0 + y)$.

4. Вычислите $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Вариант 2

1. Вычислите значения синуса, тангенса, котангенса, если $cos\alpha=-5/13$, $\alpha\epsilon(\pi/2; \pi)$.

2. Упростите выражения.

а) $\frac{sin\,\alpha\ \ sin\beta}{cos\beta\ \ cos\alpha} \cdot tg\alpha \cdot ctg\beta + 1$,

б) $sin^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha : sin^2\alpha$,

в) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - 12\pi) \cdot cos(\frac{3\pi}{2} + \beta)}{cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - sin(3\pi - \alpha) \cdot cos(-\beta - 4\pi)}$,

г) $\frac{sin\,(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)}{sin\,(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)}$.

3. Вычислите значение выражения.

а) $4cos^4\left(-\frac{13\pi}{4}\right) - 2\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + 3sin^3\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$,

б) $cos\beta + \cos(\frac{2\pi}{3} + \beta) + \cos(\frac{2\pi}{3} - \beta)$.

4. Вычислите $cos(\alpha+\beta)$, если $cos\alpha = 15/17$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что называется тождеством?

2 Какие преобразования называются тождественными?

3 Сформулируйте формулы приведения.

4 Какие периоды у синуса, косинуса, тангенса, котангенса?

3.10 Практическая работа № 10
«Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»

Учебная цель:

формировать навыки вычисления арксинуса, арккосинуса, арктангенса действительного числа, умения решать простейшие тригонометрические уравнения.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс – это математические функции угла.

Арксинусом действительного числа b, где $|b| \leq 1$, называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

$$arcsin\ b=\alpha, \text{ если } sin\alpha= b \text{ и} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Арккосинусом действительного числа b, где $|b| \leq 1$, называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен b.

$$arccos\ b=\alpha, \text{ если } cos\alpha= b \text{ и } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Арктангенсом действительного числа b называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

$$arctg\ b=\alpha, \text{ если } tg\alpha= b \text{ и} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Арккотангенсом действительного числа *b*называется такое число $\alpha \in (0;\ \pi)$, котангенс которого равен *b*.

arcctg b=*α*, если *ctgα*= *b*и$0 < \alpha < \pi$

Основные свойства

1. *arcsin*(- *b*) = - *arcsinb*.

2.*arccos*(-*b*) = $\pi -$*arccos b*.

3. *arctg*(- *b*) = - *artg b*.

4.*arcctg*(-*b*) = $\pi -$*arcctg b*.

5. *arcsin b* +*arccos b*=$\frac{\pi}{2}$.

6. *arctg b* + *arcctg b* = $\frac{\pi}{2}$.

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

Простейшие тригонометрические уравнения

1) $\boldsymbol{\sin x = a}$, $\boldsymbol{-1 \le a \le 1}$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

В частности:

$\sin x = 0$	$\sin x = -1$	$\sin x = 1$
$x = \pi k\,, \quad k \in \boldsymbol{Z}$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$

2) $\boldsymbol{\cos x = a}$, $\boldsymbol{-1 \le a \le 1}$

$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

В частности:

$\cos x = 0$	$\cos x = -1$	$\cos x = 1$
$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\,, \quad k \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	$x = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$

3) $\boldsymbol{\mathrm{tg}\, x = a}$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

4) $\boldsymbol{\operatorname{ctg} x = a}$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Пример 10.1. Решить уравнение$tg(3x + 1) = -1$.

Решение. Рассмотрим уравнение $tg\, t = a$, его решение записывается в виде $t = arctga + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Получим в нашем случае

$$3x+1 = arctg(-1) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z},$$

$$3x+1 = -\pi/4 + \pi k, k \in \boldsymbol{Z},$$

$$3x = -\pi/4 + \pi k - 1, k \in \boldsymbol{Z}$$

- разделим на коэффициент при x на (3) все члены равенства:

$$x = - \pi/12 + \pi/3\pi k - 1/3, \ , \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = - \pi/12 + \pi/3k - 1/3,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 10.2. $ctg^2 x = 1$.

Решение. Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, его решение записывается в виде $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Зная решение уравнения $t^2 = 1$, $t = \pm 1$, получим два множества решения данного уравнения

$$x = \operatorname{arcctg}(+1) + \pi k \quad \text{и} x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$x = \pi/4 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

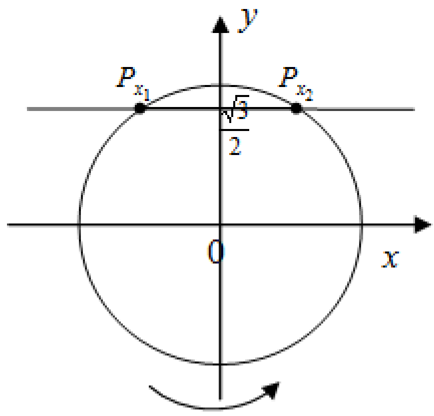
$$x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$x = \pm \pi/4 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \pi/4 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 10.3. Решить неравенство$sinx \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Построим единичную окружность и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$(ось синусов – ось Oy), точки их пересечения обозначим P_{x_1} и P_{x_2}. Решением исходного неравенства будет множество точек ординаты, которых меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем ние x_1 и x_2, совершая обход против часовой стрелки, $x_1 < x_2$.



$$x_1 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_2 = arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}.$$

Учитывая периодичность функции синус, окончательно получим интервалы:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{7\pi}{3} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in \boldsymbol{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислите.

а) *arctg 1*+ *arctg*(-*1*)+*arcsin*0; б)$cos(\pi+arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$

в)*arcsin*(-1/2)+ *arccos* $(-\frac{\sqrt{2}}{2})$+ *arctg*0.

2. Решите уравнения.

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; б) $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

в) $\sin\frac{x}{2}=-1;$ г) $\sin 4x\cdot tg\frac{x}{2}=0;$

д) $2\sin^2 x=1;$ е) $\sin 2x\cdot\cos x-\cos 2x\cdot\sin x=0;$

ж) $\cos^2 4x-\sin^2 4x-\cos 4x=0.$

3. Решите неравенства.

а) $\sin x<1/2;$ б) $\cos t\geq 1/2;$ в) $ctg y>1/2.$

Вариант 2

1. Вычислите.

а) $arctg(-\sqrt{3})+arcsin(1/2)+arccos 0;$ б) $sin(\frac{\pi}{2}+arccos\frac{1}{3})$

в) $sin\,(arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+arctg\sqrt{3}).$

2. Решите уравнения.

а) $tg 5x=1;$ б) $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=0;$

в) $tg\frac{x}{2}=0;$ г) $\cos 2x\cdot tg x=0;$

д) $\cos^2 x=1;$ е) $\sin 3x\cdot\cos x-\cos 3x\cdot\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. Решите неравенства.

а) $\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2};$ б) $\cos t\leq-\frac{\sqrt{2}}{2};$ в) $ctg y>1.$

Вариант 3

1. Вычислите.

а) $arsin(-1)+arcsin 1+arcos\ 0;$ б) $\cos(\pi+arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}));$

в) $cos\,(2arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})-arctg\sqrt{3}+arctg\ 0).$

2. Решите уравнения.

а) $ctg 4x=1;$ б) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1;$

в) $ctg\frac{x}{2}=0$; г) $\cos x(tgx-1)=0$;

д) $ctg^2x=3$; е) $\cos 4x\cdot\cos x+\sin 4x\cdot\sin x=-\frac{1}{2}$.

3. Решите неравенства.

а) $sinx \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $cost \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tgy \leq 1$.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Для каких значений определен арккосинус? Арктангенс?

2 Существует ли связь между арксинусом и арккосинусом одно и того же числа?

3 Постройте на единичной окружности точку, на которую отображается конец единичного вектора при повороте на угол $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$.

3.11 Практическая работа № 11
«Построение и чтение графиков функций»

Учебная цель:
формировать навыки построения и чтения графиков функций и умения исследовать функции по графику.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы, модели геометрических тел.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Функция - зависимость переменной y от переменной x, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Переменная x - независимая переменная или аргумент. Переменная y - зависимая переменная

Значение функции - значение у, соответствующее заданному значению x.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то есть по оси абсцисс откладываются значения переменной ***x***, а по оси ординат откладываются значения переменной ***y*.**

Основные свойства функций.

1) Область определения функции и область значений функции**.**

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента ***x***(переменной ***x***), при которых функция ***y=f(x)***определена.

Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

2) Нули функции**.**

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3) Промежутки знакопостоянства функции**.**

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения выполняется равенство **$f(-x) = f(x)$**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения справедливо равенство **$f(-x) = - f(x)$**. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \leq$ М для всех значений x. Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

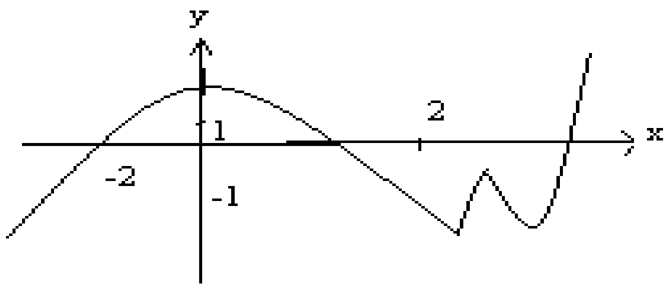
7) Периодичность функции.

Функция $f(x)$ - периодическая, если существует такое отличное от нуля число Т, что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+\mathrm{T})=\mathrm{f(x)}$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Сложная функция - функция, аргументом которой является другая любая функция.

Например, функция $y=x+4$. Подставим в аргумент функцию $y=x+2$. Получается: $y\ (x+2)=\underline{x+2}+4=x+6$. Это и будет являться сложной функцией.

Пример 11.1. По данному графику функции определить свойства функции.



1)Область определения: D_f :x € (- 4; 5).

2)Область значений: E_f: y € (-2; 2).

3) Нули функции: x=-1, x=1, x=4.

4)Промежутки знакопостоянства функции: функция положительна y>0 при x € € (-1; 1), (4; 5); функция отрицательна y<0 при x € (-4; -1), (1; 4).

5) Монотонность функции: функция возрастает на промежутках: (-2; 0) ∪ (2,5; 3) ∪ (4; + ∞); функция убывает на промежутке: (0; 2,5) ∪ (3; 4).

6) Четность и нечетность: функция общего вида, т.к. график функции не является симметричным.

7) Ограниченная и неограниченная функции: функция ограничена, область значения (-2; 2).

8) Периодичность функции: непериодическая.

Построение графиков функций можно проводить по следующим схемам.

Графиком линейной функции является прямая, для ее построения достаточно двух точек*(значения аргумента х берем произвольно, а значение функции* *у, высчитаем, подставляя в формулу).*Чтобы проверить проходит ли график функции через указанную точку нужно координаты точки подставить вместо x и y, если получили верное равенство, то прямая проходит через указанную точку, в противном случае – не проходит.

Графики степенных функций получаются из графиков функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ используя сдвиг вдоль оси x или y.$y = \pm(x \pm a)^2 \pm в$, сначала строим график функции $y = x^2$ или$y = -x^2$, затем сдвигаем его на «а» единиц вправо или влево (+*а* – влево, - *а* вправо), затем сдвигаем на «*в*» единиц вверх или вниз (+*в* – вверх, -*в* – вниз). Аналогично с другими функциями.

Чтобы построить график функции: $y = |f(x)|$, нужно:

1) построить график функции$y = f(x)$,

2) часть графика которая находится выше оси х оставить без изменения,

3) часть графика, которая находится ниже оси х зеркально отобразить.

Правило нахождения обратной функции. Если *y=f(x)*обратима, то надо решить уравнение*f(x)=y* относительно *x* и затем поменять местами *x* и *y*.

Свойства:

1) Область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

2) Обратные функции симметричны относительно прямой ***y=x.***

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найдите область определения функции.

а) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; б)$y = \sqrt{9 + 8x - x^2}$; в)$f(x) = \frac{3\cos x}{x^2+2}$.

2. Определите четность (нечетность) функции.

а)$f(x) = x^3 + 2x$; в) $f(x) = \cos 3x + 2$; г) $f(x)=4x-3x^2+1$.

3. Составьте сложную функцию *f(g(x)),* если$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

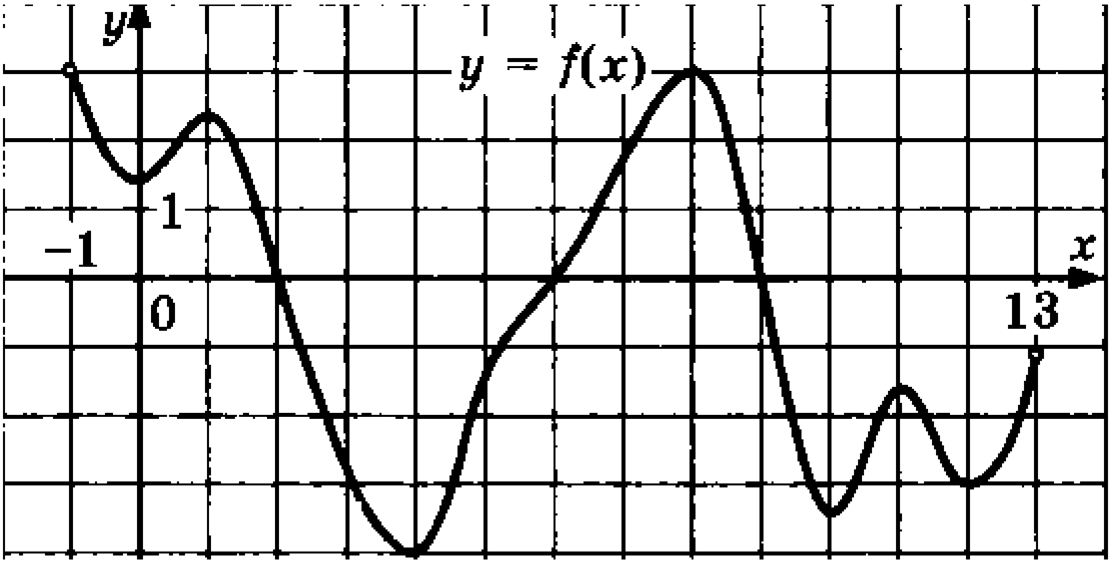
4. Постройте графики функций.

а) $y = 4 - 3x$, принадлежит ли точка М(20;64) графику данной функции.

б) $y = -(x+4)^2 + 5$. в) $y = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$ г) $y = \begin{cases} -x^2, & если \quad x \geq 1 \\ 3x, & если \quad x < 1 \end{cases}$.

5. Дана функция $f(x) = x^2 + x$ при$x \geq 0$. Запишите обратную к ней функцию в виде *y=h(x)*, указав ее область определения.

6. По данному графику функции определите свойства функции.



7. Постройте график по описанию.

Область определения: $[-7; 9]$. Множество значений: $[-6; 5]$. Точки пересечения с осью Ох: (-2;0), (3;0), (7;0). Точка пересечения с осью Оу: (0;-3). Точки максимума: (-5;5) и (5;2). Точка минимума: (1;-4). Дополнительные точки: (-7;3) и (9;-6).

Вариант 2

1. Найдите область определения функции.

а) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+4}$; б) $y = \sqrt{5 - x^2}$; в)$f(x) = \frac{3\sin x}{4x^2+1}$.

2. Определите четность (нечетность) функции

а)*f(x) =5x – 1/x; 2) f(x) = x² -2+| x|;*в) *f(x)=5-3x³ +x²*.

3. Составьте сложную функцию *f(g(x))*, если$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

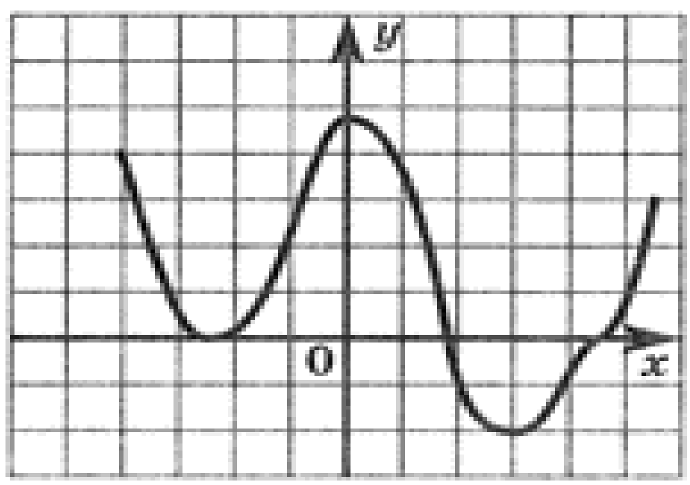
4. Постройте графики функций, используя различные преобразования.

а) $y = -\frac{1}{2}x + 2$, принадлежит ли точка Е(-20;8) графику данной функции.

б) $y=(x-2)^3-1$. в) $y=\left|3-\frac{1}{2}x\right|$ г) $y=\begin{cases} x^2, & если \quad x \geq -1 \\ -x, & если \quad x < -1 \end{cases}$

5. Дана функция $f(x)=\sqrt{2x-1}$ при$x \geq 0{,}5$. Запишите обратную к ней функцию в виде *y=h(x)*, указав ее область определения.

6. По данному графику функции определите свойства функции (1 клетка - 1 единица).



7. Постройте график по описанию.

Область определения: $[-4; 8]$. Множество значений: $[-4; 5]$. Точки пересечения с осью Ox: (-1;0), (4;0), (7;0). Точка пересечения с осью Oy: (0;-1,5).Точки максимума: (-3;4) и (6;5). Точка минимума: (1;-2). Дополнительные точки: (-4;2) и (8;-4).

Вариант 3

1. Найдите область определения функции.

а) $f(x)=\frac{3x+1}{5x+4}$; б) $y=\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}$; в)$f(x)=\frac{3\operatorname{tg}x}{x^4+1}$.

2. Определите четность (нечетность) функции

а)$f(x)=5x-1/x$; 2) $f(x)=x^2-2+|x|$;в) $f(x)=3\sin 2x$.

3. Составьте сложную функцию *f(g(x)),* если
$f(x)=3x+2\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$.

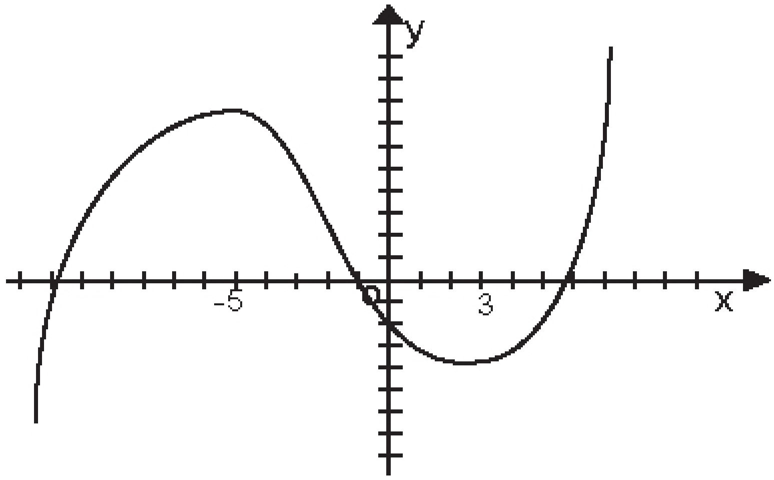
4. Постройте графики функций, используя различные преобразования.

а) $y=\frac{1}{3}x-2$.Принадлежит ли точка F(60;18) графику данной функции.

б) $y = \sqrt{x+3} + 1$. в) $y = \left|1 - \frac{1}{3}x\right|$ г) $y = \begin{cases} x^2, & если \quad x > -2 \\ x+2, & если \quad x \le -2 \end{cases}$

5. Дана функция $f(x) = x^2 - 5$ при$x \geq 0$. Запишите обратную к ней функцию в виде *y=h(x)*, указав ее область определения.

6. По данному графику функции определите свойства функции.



7. Постройте график по описанию.

Область определения: $[-10; 2]$. Множество значений: $[-6; 6]$. Точки пересечения с осью Ох: (-9;0), (-5;0) (-2;0), (1;0). Точка пересечения с осью Оу (0;3). Точки максимума: (-7;3); (-1;6). Точка минимума: (-3-6). Дополнительные точки: (-10;-2) и (4;-6).

Вариант 4

1. Найдите область определения функции.

а) $f(x) = \frac{5ctgx}{x^2-9}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$; в) $f(x) = \frac{3\sin x}{4x^2+1}$.

2. Определите четность (нечетность) функции

а)$f(x) = -x^4 + x^2$; б) $f(x) = 5x - 1/x$; в) $f(x) = \sqrt{2x-3}x$.

3. Составьте сложную функцию *f(g(x))*, если$f(x) = x\sqrt{x}$, $g(x) = 1 - 4x$.

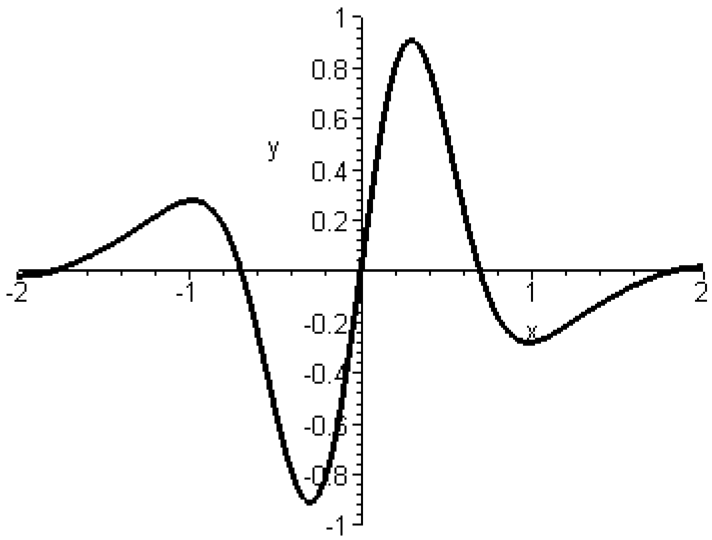
4. Постройте графики функций, используя различные преобразования, ответьте на вопрос задачи.

а) $y = 3x - 4$.Принадлежит ли точка К(-30;86) графику данной функции.

б) $y = -(x+2)^3 + 1$. в) $y = \left|\frac{1}{3}x - 1\right|$ г) $y = \begin{cases} x^3, & если \quad x \ge 1 \\ -2x, & если \quad x < 1 \end{cases}$

5. Дана функция $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ при $x \geq 0{,}5$. Запишите обратную к ней функцию в виде *y=h(x)*, указав ее область определения.

6. По данному графику функции определите свойства функции.



7. Постройте график по описанию.

Область определения: $[-2; 10]$. Множество значений: $[-3; 7]$. Точки пересечения с осью X: (5;0).Точка пересечения с осью Оу (0;-3). Точки максимума: (6;5). Точка минимума: (0;-3). Дополнительные точки: (-2;7) и (10;1).

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что надо указать для задания функции?

2 Как представляется график четной функции? Приведите пример графика четной функции.

3 Вычислите значение функции $s(t) = \frac{1}{t+1} + t^3$ в точке 1/3.

4 Найдите значение аргумента, если известно соответствующее ему значение функции $g(z) = 2z^2 - 1$ равно 1.

3.12 Практическая работа № 12

«Обратные тригонометрические функции. Преобразование графика. Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения»

Учебная цель:

освоение знаний об обратных тригонометрических функциях; овладение умениями изображать графики обратных тригонометрических функций и описывать их свойства; использование знаний о характере поведения функций для описания и анализа реальных зависимостей; овладение умениями преобразования графиков функций; овладение умениями решения уравнений.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы, модели геометрических тел.

Порядок выполнения работы:

1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Если функция $y=f(x)$ принимает каждое своё значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

Пусть $y=f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области её определения, такое, что $f(x)=y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x=g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями поменяем местами x и y. Получим $y=g(x)$. Функцию $y=g(x)$ называют **обратной** к функции $y=f(x)$.

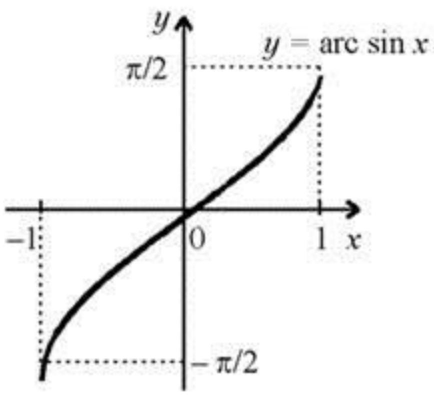
Правило нахождения обратной функции. Если $y=f(x)$обратима, то надо решить уравнение $f(x)=y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Свойства:

1) Область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

2) Обратные функции симметричны относительно прямой ***y=x.***

Обратными к тригонометрическим функциям являются функции *y = arcsinx, y = arccosx, y =arctgx, y = arcctgx.* Их графики представлены на следующих рисунках (Рисунок 12.1-12.4).



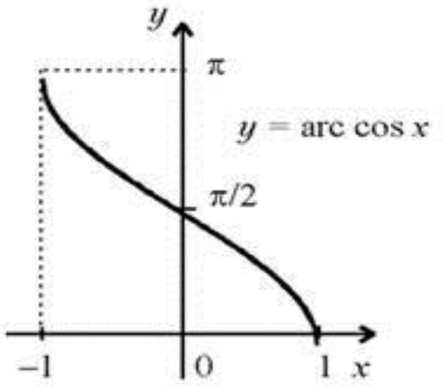


Рисунок 12.1 Рисунок 12.2

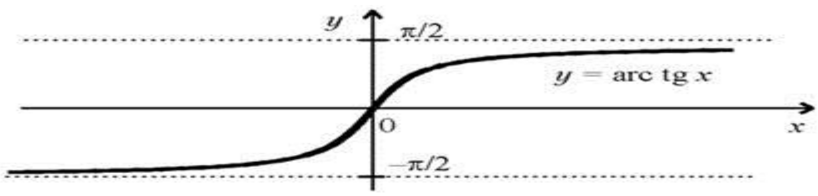


Рисунок 12.3

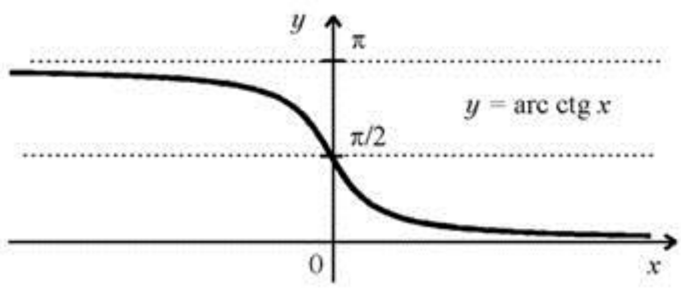


Рисунок 12.4

Пример 12.1. Найти область определения следующих функций:

1)y =arcsin (x-2). 2)y =arccos $\frac{1-2x}{4}$ *. 3) y =arcsin* $\frac{x-3}{2}$.

Решение.

1)*D (arcsin)* = $[-1;1]$, поэтому $-1 \le x-2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$. *D (y)* = $[1;3]$.

2)*D (arccos)* = $[-1;1]$ и значит $-1 \le \frac{1-2x}{4} \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 1-2x \le 4 \Leftrightarrow -5 \le -2x \le 3 \Leftrightarrow -1{,}5 \le x \le 2{,}5$. *D (y)* = $[-1{,}5;2{,}5]$.

3) Аналогично $-1 \le \frac{x-3}{2} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2$, $1 \le x \le 5$.*D (y)* = $[1;5]$.

Ответ :1)*D (y)* = $[1;3]$; 2)*D (y)* = $[-1{,}5;2{,}5]$; 3)*D (y)* = $[1;5]$.

Классификация тригонометрических уравнений по методам решения:

№	Уравнение	Метод решения
1 2	а) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ б) $2\sin^2 x - 5\sin x = 3$ $3\sin x = 2\cos^2 x$	**Квадратное уравнение.** Подстановка *cosx = t.* Подстановка *sinx = t.* Замена $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, подстановка *sinx= t.*
3 4	$\sin 2x - \cos x = 0$ $\sin 2x \cos x + 2\sin^2 x = 1$	Разложение на множители. Применение тригонометрической формулы и вынесение общего множителя за скобки.
5 6	$\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$	Введение вспомогательного угла.

Пример 12.2. Решить уравнение: $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

Решение. Введем новое неизвестное *cosx = t*, тогда $2t^2 + 3t + 1 = 0$. Уравнение имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$\cos x = -1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$. Решая каждое из этих уравнений, находим:

$$x_k = \pi + 2\pi k, k \in Z, x_n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, x_m = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z.$$

Ответ: $\pi + 2\pi k, k \in Z; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z.$

Пример 12.3. Решить уравнение: $3\sin x = 2\cos^2 x$.

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ перепишем уравнение в виде $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$. Введем новое неизвестное $\sin x = t, |t| \le 1,$ тогда уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -2$, поэтому $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -2$ не имеет решения, решения первого уравнения состоят из двух множеств.

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z, x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 12.4. Решить уравнение: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$.

Решение. Разделив обе части уравнения на число $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, перепишем его в виде $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$. Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Все решения уравнения задаются формулами $x_k - \frac{\pi}{4} = 2\pi k, k \in Z,$ откуда

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z,$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Постройте в тетради графики функций: *y = arcsinx, y = arccosx, y =arctgx, y = arcctgx*. По графикам обратных тригонометрических функций, опишите их свойства по плану:

1) Область определения:

2) Множество значений:

3) Четность, нечетность:

4) Нули функции:

5) Промежутки знакопостоянства:

6) Промежутки монотонности:

7) Экстремумы:

8) Периодичность:

9) Ограниченность:

10) Выпуклость:

2. Найдите область определения следующих функций:

а) *arccos3x*; б) *arcsin(x-3)*; в*) arctg 5x*; г) *arcctg(3x-5)*;

д) $y = \log_3(x+1) - \log_3 2x$.

3. Постройте график функции.

а) $y = 2 + \cos\frac{x}{2}$; б) $y = 4\log_2(x-2)$.

4. Решите уравнения.

а) $2^x - 2^{x-4} = 15$ б) $64 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} = 4^{\sqrt{x-1}}$

в) $\log_{x-1}(x^2 - 7x + 41) = 2$ г) $\lg x + \lg(x+3) = 1$

д) $2\sin(3x-2) = 1$ е) $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

Вариант2

1. Постройте в тетради графики функций: *y = arcsinx*, y = arccosx, *y =arctgx*, *y = arcctgx*. По графикам обратных тригонометрических функций, опишите их свойства по плану:

1) Область определения:

2) Множество значений:

3) Четность, нечетность:

4) Нули функции:

5) Промежутки знакопостоянства:

6) Промежутки монотонности:

7) Экстремумы:

8) Периодичность:

9) Ограниченность:

10) Выпуклость:

2. Найдите область определения следующих функций:

а) *arcsin(x/5)*; б)*arccos(x+4)*; в)*arcctg 4x*; г)*arctg(2x+1)*;

д) $y = 3\log_{0,5}(3x-1) + \log_x 34$.

3. Постройте график функции.

а) $y = 3sin2x$; б) $y = 3^{x+1} - 2$.

4. Решите уравнения.

а) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 225$ б) $100^x = 0{,}1(10^{x-1})^5$

в) $log_{x+2}(2x^2 - 5x + 18) = 2$ г) $log_{16}^2 x - 5\log_{16} x + 6 = 0$

д) $2\cos(2x + \pi/2) = -1$ е) $cos^2 x sinx - 2sinx = 0$

Вариант 3

1. Постройте в тетради графики функций: *y = arcsinx, y = arccosx, y =arctgx, y = arcctgx*. По графикам обратных тригонометрических функций, опишите их свойства по плану:

1) Область определения:

2) Множество значений:

3) Четность, нечетность:

4) Нули функции:

5) Промежутки знакопостоянства:

6) Промежутки монотонности:

7) Экстремумы:

8) Периодичность:

9) Ограниченность:

10) Выпуклость:

2. Найдите область определения следующих функций:

а) *arccos7x*; б) *arcsin(x+2)*; в) *arctg(x/5)*; г) *arcctg(5-6x)*;

д) $y = 3\,lg(4x+1) + \log_x(x+2)$.

3. Постройте график функции.

а) $y = 1 + tg(x - \frac{\pi}{4})$; б) $y = \log_{0,5}(x+4)$-1.

4. Решите уравнения.

а) $5^x - 5^{x+1} = 75$ б) $3\sqrt{3} = 3^{0,5(x-5)}$

в) $log_{2-x}(2x^2 - 5x + 2) = 2$ г) $lg(x^2 - 17) - \lg(2x-2) = 0$

д) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$ е) $2\sin x - cos^2 x sinx = 0$

Вариант 4

1. Постройте в тетради графики функций: *y = arcsinx, y = arccosx, y =arctgx, y = arcctgx*. По графикам обратных тригонометрических функций, опишите их свойства по плану:

1) Область определения:

2) Множество значений:

3) Четность, нечетность:

4) Нули функции:

5) Промежутки знакопостоянства:

6) Промежутки монотонности:

7) Экстремумы:

8) Периодичность:

9) Ограниченность:

10) Выпуклость:

2. Найдите область определения следующих функций:

а) *arcsin 9x*; б) *arcsin(5-x)*; в) *arctg(x/3)*; г) *arcctg(1-2x)*;

д) $y = 3\log_{0,5}(3x-1) + \log_x 34$.

3. Постройте график функции.

а) $y = 0{,}5cosx - 1$; б) $y = 2^{x-3} + 1$.

4. Решите уравнения.

а) $7^{5x} - 7^{5x-1} = 6$ б) $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$

в) $ln(3x-5) = 0$ г) $lgx + \lg(x+3) = 1$

д) $\sqrt{2}\sin(4x+2) = -1$ е) $5ctg^2x - 8ctgx + 3 = 0$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

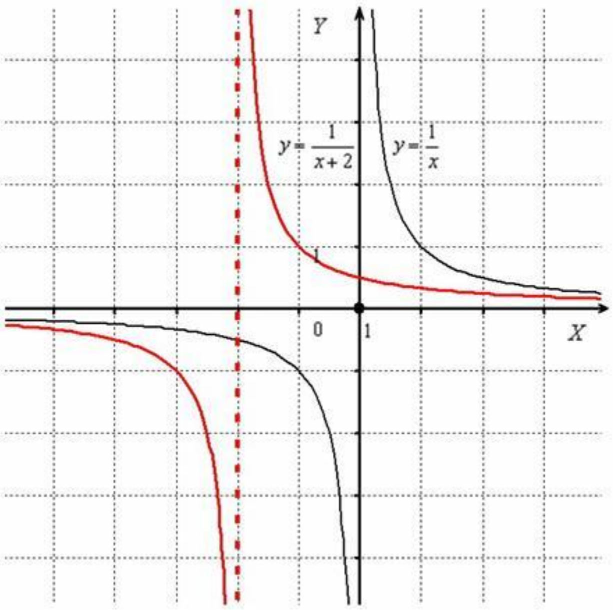
2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какие обратные тригонометрические функции знаете?

2 Объясните, какие преобразования графика были выполнены для построения графика указанной функции.



3 Какая функция называется возрастающей?

4 Какая точка графика функции называется точкой перегиба?

3.13 Практическая работа № 13

«Площадь поверхности многогранников. Симметрия многогранников»

Учебная цель:

формировать навыки измерения основных элементов предложенной модели; умения вычислять площади поверхности и объёма данного геометрического тела.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы, модели геометрических тел.

Порядок выполнения работы:

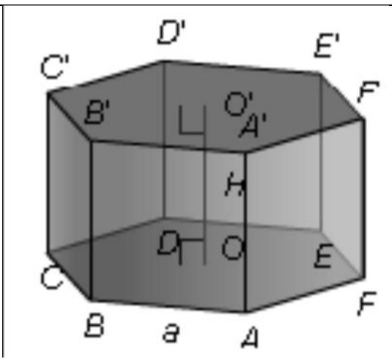
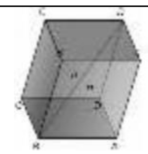
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

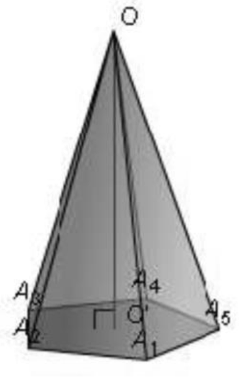
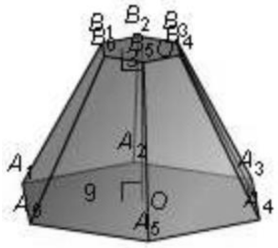
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

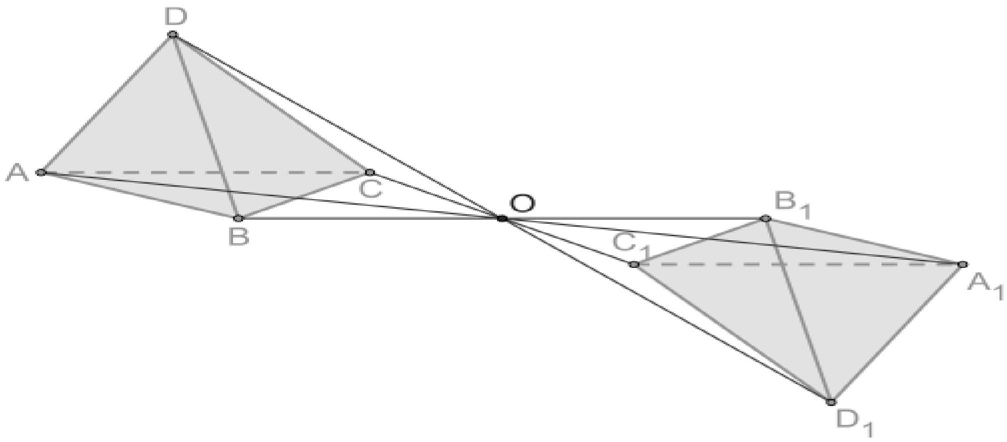
Объемы и площади поверхностей многогранников приведены в таблице.

Прямая призма	
l– боковое ребро, H – высота, P – периметр основания, $S_{осн}$– площадь основания, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, $S_{п}$– площадь полной поверхности призмы, V – объем. $V = S_{осн} \cdot H,\ S_{бок} = P \cdot H.$	
Параллелепипед	
a, b, c – измерения, $d1$, $d2$, $d3$ – диагонали, V – объем, S – площадь полной поверхности.	

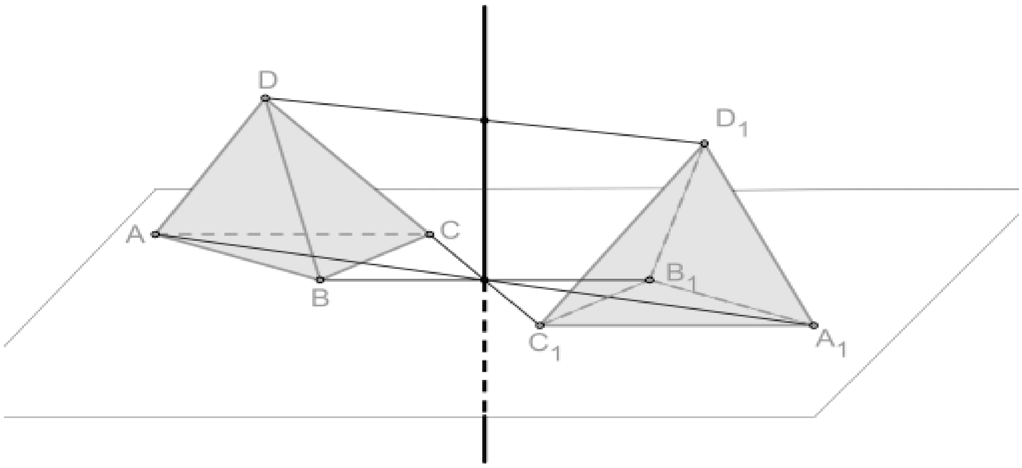
Для прямого параллелепипеда: $d1=d2=d3=dd^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S=2(ab+ac+bc)$.	
Пирамида	
P – периметр основания, l – апофема, H – высота, $S_{осн}$– площадь основания, $S_{бок}$– площадь боковой поверхности, V – объем пирамиды. В общем случае площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H; \quad S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h.$	
Усеченная пирамида	
l – апофема, $P1$, $P2$ – периметры оснований, $S1$, $S2$ – площади оснований, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности для правильной пирамиды. $V = \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right),$ $S\text{бок} = \frac{1}{2}(P1 + P2)l.$	

Виды симметрий в пространстве

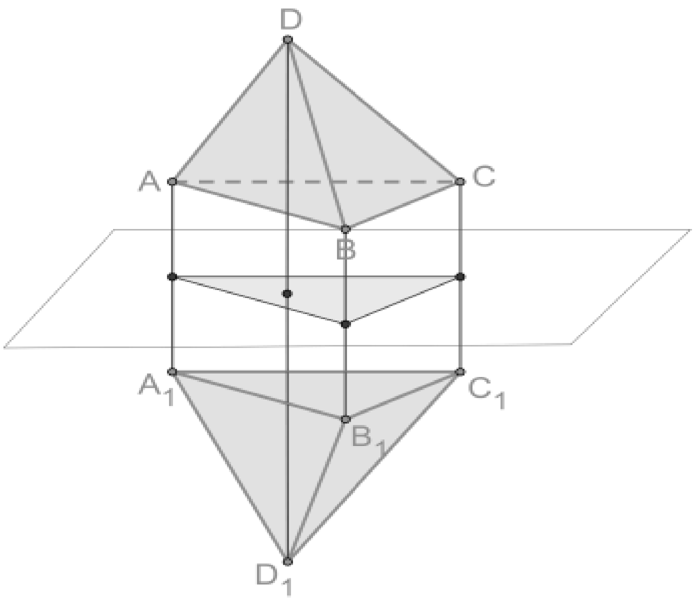
1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки).



2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой).



3. Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости):
Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно этой плоскости точку M1.Фигура симметрична относительно некоторой плоскости, если при симметрии относительно этой плоскости фигура переходит сама в себя. Такая плоскость называется плоскостью симметрии фигуры.



Многогранник называется правильным, если все его грани - равные друг другу правильные многоугольники, а все его двугранные углы равны между собой. Евклид доказал, что существует всего пять видов правильных многогранников:

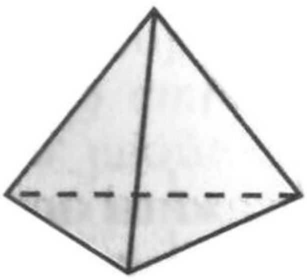
1) правильные тетраэдры (четырехгранники), у которых грани правильные треугольники;

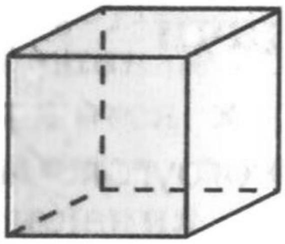
2) кубы (правильные гексаэдры, шестигранники), у которых грани - квадраты;

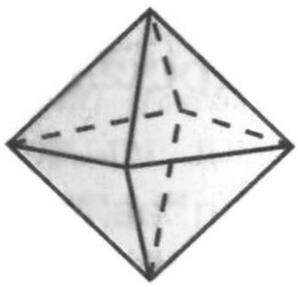
3) правильные октаэдры (восьмигранники), у которых грани - правильные треугольники;

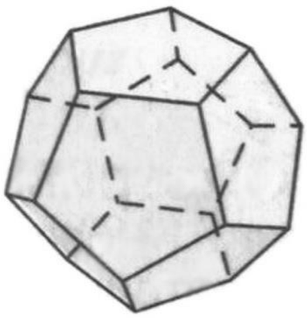
4) правильные додекаэдры (двенадцатигранники), у которых грани - правильные пятиугольники;

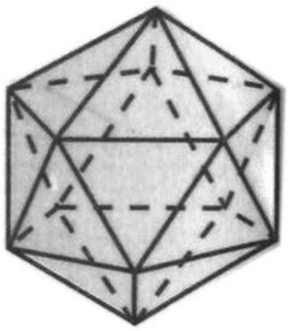
5) правильные икосаэдры (двадцатигранники), у которых грани - правильные треугольники.


1)


2)


3)


4)


5)

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Модель призмы.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

Название модели	Изображение модели	Измерения основных элементов	Вычисления			
			площади			объёма
			основания	боковой	полной	

2. По данной модели выполните развёртку.

3. Выкопан ледник в форме прямоугольного параллелепипеда размером 4,0 x 5,0 x2,5 *м.* Найти площадь выема льда на озере, необходимую, чтобы набить ледник льдом доверху. Толщина льда на озере 40 *см*, 8% займут пустоты межу кусками льда.

4. В пятиугольной призме через одно ребро проведите диагональные сечения.

5. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота 9см, а апофема равна 18см.

6. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 3см и 8см и углом между ними 60°. Высота призмы равна 15см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

7. Основание прямой призмы ромб со стороной 12см и углом 60°. Боковое ребро призмы равно 13см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

Вариант 2

1. Модель пирамиды.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

Название модели	Изображение модели	Измерения основных элементов	Вычисления			
			площади			объёма
			основания	боковой	полной	

2. Ответьте на вопросы.

а) Сколько рёбер имеет n- угольная пирамида?

б) Боковые рёбра пирамиды равны между собой. Может ли основание пирамиды быть: ромбом? Прямоугольником? правильным шестиугольником?

3. Кристалл имеет форму двух правильных четырёхугольных пирамид, соединённых основаниями. Сторона общего основания равна3,5 см, расстояние между вершинами соединённых пирамид 5,0 см. Найти объём кристалла.

4. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 кв. см. Вычислите площадь боковой поверхности.

5. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а площадь её полной поверхности 144 см^2. Найдите площадь её боковой поверхности.

6. Вычислить объем призмы, в основании которой -параллелограмм со сторонами 4 и 3 см, а угол между ними равен 30 ^{o}; высота призмы равна 10 см.

Вариант 3

1. Модель куба.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

Название модели	Изображение модели	Измерения основных элементов	Вычисления			
			площади			объёма
			основания	боковой	полной	

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $10\sqrt{2}$ см, а сторона основания – 6см. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

3. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 15см и углом между ними 30°. Высота призмы равна 11см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4. Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция, основания которой 11 и 21 см.. а боковая сторона равна 13см.; площадь диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

5. Вычислить объем призмы, в основании которой –прямоугольник со сторонами 4 и 5 см. Высота призмы равна 12 см.

6. Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами основания 6см и 4см, и углом между ними равен 45°. Боковое ребро равно 10см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $A\text{-}D_1$. Найдите диагональ параллелепипеда, площадь боковой и полной поверхности, если его измерения равны 4см, 2см и 5 см.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что называется многогранником?

2 Какой многогранник называется выпуклым?

3 Как вычисляется площади поверхности многогранника?

4 Что представляет собой развертка куба?

3.14 Практическая работа № 14

«Симметрия тел вращения. Вычисление площадей и объемов тел вращения»

Учебная цель:

формировать навыки измерения основных элементов предложенной модели; умения вычислять площади поверхности и объёма данного геометрического тела.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы, модели геометрических тел.

Порядок выполнения работы:

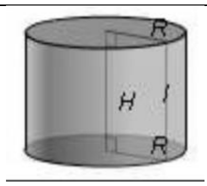
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

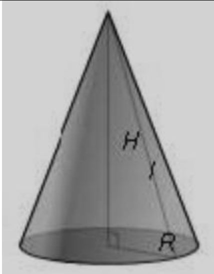
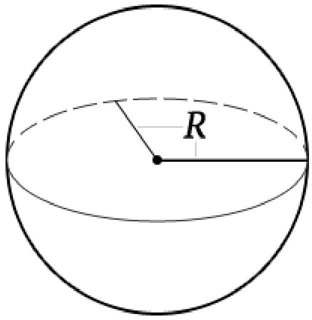
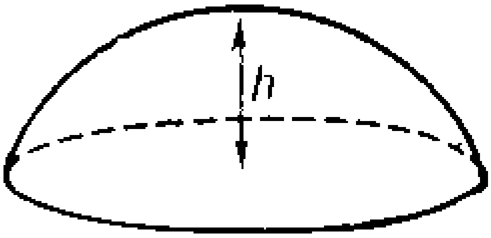
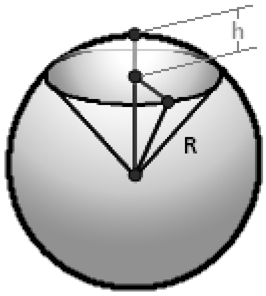
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Объемы и площади поверхностей тел вращения приведены в таблице:

Цилиндр	
R – радиус основания, H – высота, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, Sп – площадь полной поверхности, V – объем цилиндра. $V = \pi R^2 H, \quad S бок = 2\pi RH.$	
Конус	

R – радиус основания, L – образующая конуса, H – высота, Sбок – площадь боковойповерхности, Sп – площадь полной поверхности, V – объем.	
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, Sбок $= \pi$RL.	
Сфера и шар	
R – радиус, V – объем, S – площадь сферы (поверхности шара). $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.	
Шаровой сегмент	
R – радиус шара, h- высота шарового сегмента, a- расстояние от центра шара до центра шарового сегмента, V – объем, S – площадь поверхности шарового сегмента. $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$, $S = \pi(2Rh + a^2)$.	
Шаровой сектор	
R – радиус шара, h- высота шарового сегмента, a- расстояние от центра шара до центра шарового сегмента, V – объем, S – площадь поверхности шарового сектора. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, $S = \pi R(2h + a)$.	

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Модель шара.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

Название модели	Изображение модели	Измерения основных элементов	Вычисления	
			площадь поверхности	объёма

2. Ответьте на вопросы.

а) Что служит сечением сферы плоскостью?

б) При каком условии сечения сферы плоскостью равны?

в) Какое сечение шара называется большим кругом?

3. Как изменится площадь большого круга шара, если радиус шара: 1)увеличить в2 раза; 2) уменьшить в 2 раза.

4. Чтобы отлить свинцовый шар диаметром 3 см, используют свинцовые шарики с диаметром 5мм. Сколько таких шариков надо отлить?

5. В цилиндре через середину радиуса основания перпендикулярно ему проведено сечение. В сечении образовался квадрат площадью 16 квадратных сантиметров. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

Вариант 2

1. Модель цилиндра.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

Название модели	Изображение модели	Измерения основных элементов	Вычисления			
			площади			объёма
			основания	боковой	полной	

2. Квадратный лист жести со стороной 2 м свернут в трубу. Найдите объём трубы.

3. Прямоугольный лист жести, имеющий длину 1,6 м и ширину 0,8 м, можно свернуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки 1,6 м, во втором 0,8 м. Найдите отношение а) объёмов трубок; в) площадей их поверхности.

4. Площадь осевого сечения конуса 60 квадратных сантиметров. Вычисли площадь его полной поверхности.

Вариант 3

1. Модель конуса.

Последовательно выполните предложенные задания, используя модель, результаты запишите в таблицу.

<table>
<tr><th rowspan="3">Название модели</th><th rowspan="3">Изображение модели</th><th rowspan="3">Измерения основных элементов</th><th colspan="4">Вычисления</th></tr>
<tr><th colspan="3">площади</th><th rowspan="2">объёма</th></tr>
<tr><th>основания</th><th>боковой</th><th>полной</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
</table>

2. По данной модели выполните развёртку.

3. Рассчитайте размеры выкройки (развёртки) для конической воронки (условно считать полным конусом). Объём воронки должен быть 1200 кубических сантиметров.

4. Окружность основания конусообразной кучи песка равна18 м, уклон 1: 1,5. Найдите её объём.

5. В шар вписан цилиндр**.** Радиус основания цилиндра относится к его высоте, как2:3. Площадь поверхности шара равна 225. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Дайте определение тела вращения.

2 Какими фигурами являются сечения сферы и шара?

3 Какая фигура получается при вращении кругового сектора?

4 Что такое ось прямого кругового конуса?

3.15 Практическая работа № 15
«Числовая последовательность. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия»

Учебная цель:

закрепить способы задания числовой последовательности, знания свойств числовой последовательности; отработать навыки вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии; отработать навыки вычисления предела числовой последовательности.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

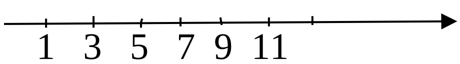
2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

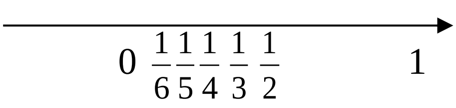
3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Рассмотрим две числовые последовательности:

$\{y_n\}$:1, 3, 5, 7, 9, 11,…,2n-1,…; $\{x_n\}:1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},....,$

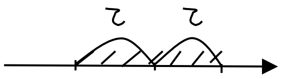




Заметим, что $\{y_n\}$ –расходится, а $\{x_n\}$ -сходится. У последовательности $\{x_n\}$ все её члены «сгущаются» около точки 0. В математике не используют слова «точка сгущения», а используют термин «предел последовательности».

Итак, если последовательность сходится, то она имеет предел.

Определение. Окрестностью точки $\boldsymbol{b}$ называется промежуток, на котором точка $\boldsymbol{b}$ является внутренней.(r-радиус окрестности)



b-r b b+r

Определение. Число $\boldsymbol{b}$ называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, находятся в окрестности точки $\boldsymbol{b}$.

Пишут так: $\lim_{n\to\infty} x_n = b$(читают: предел последовательности $\{x_n\}$ при стремлении n к бесконечности равен $\boldsymbol{b}$).

Пояснение к определению. Если число $\boldsymbol{b}$-предел последовательности, то образно выражаясь, окрестность точки $\boldsymbol{b}$- это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0эта ловушка «заглатывает » x_{n0} и все последующие члены последовательности. Чем меньше выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется » последовательность, но потом всё равно попадает, в выбранную окрестность.

Пример15.1.$\{x_n\}$:1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$,- последовательность сходится к 0.

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Приведём пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, шестнадцатиугольник и т.д. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена снизу числом 0, а сверху числом выражающим площадь описанного около окружности квадрата. Значит по т. Вейерштрасса последовательность сходится, её предел принимается за площадь круга.

Теоремы о пределах

1. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности: $\lim_{n\to\infty} C = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = k\lim_{n\to\infty} x_n.$$

3. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

4. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

5. Предел частного равен частному пределов: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, при условии что $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

6. Предел степени равен степени предела: $\lim_{n\to\infty}(x_n)^m = (\lim_{n\to\infty} x_n)^m$, где $m \in N$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если её предел равен нулю.

Например, последовательность $\{x_n\}$:$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ бесконечно малая, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого положительного числа М, как бы велико оно ни было, существует такой номер N , что для всех $\{x_n\}$ с номерами $n>N$ справедливо неравенство $|x_n|>M$. То есть, последовательность называется **бесконечно большой**, если её предел равен бесконечности.

Например, последовательность $\{z_n\}$:$1,2,3,4,5,\ldots,n,\ldots$ бесконечно большая, т.к. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой (бесконечно большой), то $\frac{1}{(x_n)}$ - бесконечно большая (бесконечно малая).

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n,\ldots$ Пусть $S_1=b_1, S_2=b_1+b_2, S_3=b_1+b_2+b_3, \ldots S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n.,\ldots$

Получилась последовательность S_1, S_2, S_3,…, S_n,…Как всякая последовательность может сходится или расходится. Если последовательность S_nсходится к пределу S, то число S называют суммой геометрической прогрессии.

Пусть надо найти сумму n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n,\text{то } S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$.

Найдём:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n\right) = \frac{b_1}{1-q}(1-0) = \frac{b_1}{1-q}$$

Поэтому при $|q|<1$ $\quad S=\dfrac{b_1}{1-q}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант1

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$a_n = \frac{2n-1}{3+n}.$$

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите десятый и двенадцатый члены последовательности.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Найдите порядковый номер того члена последовательности, начиная с которого все следующие члены будут больше 1,5.

2. Напишите первые шесть членов числовой последовательности, если $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n\,, a_1 = 2, a_2 = 3$.

3.Найдите сумму геометрической прогрессии

1) 25, -5,1,…2) 0,8; 0,08; 0,008…3) 0,42; 0,042; 0,0042…

4) 0,168; 0,00168; 0,0000168…5) b_1=-1; q=0,2.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+7}{n+3n^2+2}$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+6n-7}{n+22}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3-n+11}{n^2+7n-5}$ 5) $\lim_{n\to\infty}(2n^2-n+7)$.

Вариант 2

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой $a_n=\frac{2n+1}{2n+3}$.

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите девятый и двадцать первый члены последовательности.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Найдите порядковый номер того члена последовательности, начиная с которого все следующие члены будут больше 0,8.

2. Напишите первые восемь членов числовой последовательности, если $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$, $a_1=0, a_2=1$.

3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,7; 0,07; 0,007…2) 0,24; 0,0024; 0,000024…

3) 0,008; 0,00008; 0,0000008… 4) 1/5; 1/10; 1/20; 1/40;….5) $b_n=\frac{20}{3^{n-1}}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-6n+8}{4n^2+2n+6}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3n}{n+4}$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n+1}{n^3+3n^2-1}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+8n^2-3n}{2n^3+3n^2+2}$ 5) $\lim_{n\to\infty}(14n^5-n)$.

Вариант 3

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$a_n=(-1)^n(3+2n).$$

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите одиннадцатый и пятидесятый члены последовательности.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Являются ли членами последовательности числа 107, -713? Если да, то определите порядковый номер.

2. Напишите первые семь членов числовой последовательности, если $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 1, a_2 = 2$.

3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,06; 0,006; 0,0006…2) 0,13; 0,013; 0,0013…3) 0,045; 0,0045; 0,00045…

4) 1/8; 1/16; 1/32; 1/64;….. 5) $b_n = (-1)^n \frac{12}{2^{n+1}}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+8}{7n}$ 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2+5n+1}{11n^2-3n-14}$ 3) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-5n}{n^3+22}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{11n^5+11}{n^2+7n-5}$5) $\lim_{n\to\infty}(-n^4 + 9n + 2)$.

Вариант 4

1. Дана числовая последовательность 2, -3, 4, -5, 6, …..

1) Запишите формулу общего члена. Найдите двадцатый и девяносто седьмой члены последовательности.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Покажите, что данная последовательность неограниченна.

4) Являются ли членами последовательности числа -400, -446? Если да, то определите порядковый номер.

2. Напишите первые шесть членов числовой последовательности, если $a_{n+1} = (n + 1)a_n$, $a_1 = 1$.

3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,4; 0,04; 0,004; 0,0004…2)0,17; 0,0017; 0,000017…

3)0,054; 0,0054; 0,00054…4)1/3 ; 1/6 ; 1/12; 1/36; …5) $b_n = \frac{45}{3^n}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{16-n^2}{n^2+n+1}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3-3n^2+5n}{n^3+9n+4}$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{n^3+2}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+1}{n^2+7n^3-15}$ 5) $\lim_{n\to\infty}(n^5-99n+2)$.

Вариант 5

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой $x_n = \frac{n+2}{n^3+1}$.

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите шестой и сотый члены последовательности.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Являются ли членами последовательности числа 1, -7/13? Если да, то определите порядковый номер.

2. Напишите первые пять членов числовой последовательности, если $a_{n+1} = 2a_n!\,, a_1 = 1$.

3. Найдите Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,75; 0,075; 0,0075…2) 0,16; 0,0016; 0,000016…3) 0,006; 0,0006; 0,00006…

4) 1/2 ; 1/8 ; 1/32 ; …5) $b_n = (-1)^n\frac{3}{55^n}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-3}{5n^2}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2}{9n+4}$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3}{n^4+1}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n}{n^2+4n^3+5}$ 5) $\lim_{n\to\infty}(2-9n)$.

Вариант 6

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой $y_n = \frac{n}{2^{n+1}}$.

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите y_7, y_9.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Являются ли членами последовательности числа 1/2, 7/16, 9/1024? Если да, то определите порядковый номер.

2. Напишите первые пять членов числовой последовательности, если $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 0, a_2 = 1$. Найдите y_{888}.

3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,82; 0,0082; 0,000082…2) 0,27; 0,027; 0,0027…

3) 0,0004; 0,00004; 0,000004… 4) 2/3; 2/9; 2/27;…… 5) $b_n = \frac{11}{6^n}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{10n \quad -7}{6n}$ 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^6+n+1}$ 3) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-8n-9}{3-n+n^2}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{8-8n^2+n}$ 5) $\lim_{n\to\infty}(2n^3 + 2n + 2)$.

Вариант 7

1. Общий член числовой последовательности выражается формулой $y_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

1) Вычислите первые пять членов этой последовательности. Найдите y_6, y_{11}.

2) Дайте геометрическое изображение первых членов последовательности на числовой оси.

3) Ограниченная ли данная последовательность? Почему?

4) Являются ли членами последовательности числа 0,5; -14/169; 15/364. Если да, то определите порядковый номер.

2. Напишите первые восемь членов числовой последовательности, если

$$a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3\,, a_1 = 1.$$

3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,28; 0,028; 0,0028…2) 0,73; 0,0073; 0,000073…

3) 0,009; 0,00009; 0,0000009…4) 2/9 ; 2/27 ; 2/81 ; …5) $b_n = (-1)^n \frac{2}{75^n}$.

4. Вычислите:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{14n \quad -7}{5-2n}$ 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+1}{n^3-9n+10}$ 3) $\lim_{n\to\infty}(n^4+2)$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+8n}{4+n+n^3}$ 5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{1-n^2+4n}$.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1Перечислите способы задания числовой последовательности.

2 Какие свойства числовой последовательности знаете?

3 Приведите пример геометрической убывающей последовательности?

3.16 Практическая работа №16
«Геометрический и физический смысл производной. Правила и формулы дифференцирования»

Учебная цель:

научиться вычислять производные элементарных функций с помощью правил дифференцирования и таблицы для производных; применять на практике понятие производной.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при условии, что последнее стремиться к нулю. Производная обозначается символами: y', y'_x, $f'(x)$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Продифференцировать данную функцию — значит найти ее производную.

Из определения производной непосредственно вытекает общий метод ее нахождения. Числовое значение производной данной функции $y = f(x)$ при данном числовом значении аргумента *x=a* называется частным значением производной. Это записывается так:

$$y'(a),\ y'|_a,\ f'(a),\ y'_{x=a}.$$

Рассмотрим *геометрическое* и механическое значение производной. Производная $y' = f'(x)$ при данном значении $x=a$ равна угловому коэффициенту k касательной, проведенной к кривой через данную на ней точку М, абсцисса которой и есть данное значение $x=a$. Это можно записать та: $k = f'(a)$. Напомним что угловой коэффициент $k = tg\ \alpha$, где α есть угол, составленный касательной и положительным направлением оси *Ox*. Для каждой точки касания угол наклона α имеет свое единственное значение.

Если тело движется по закону *S=f(t),* где *S*— путь в метрах, а *t*— время в секундах, то при изменении времени *t* на величину Δtвлечет за собой изменение величины *S* на величину ΔS, то отношение ΔS к Δt ($\Delta S/\Delta t$) есть средняя скорость изменения пути по времени *t*.

Механический смысл производной: мгновенная скорость неравномерного движения есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути *S* от времени *t*. Если закон прямолинейного движения задан уравнением *S=f(t),* где *S*— путь в метрах, а *t*— время в секундах, то скорость $v=s_t' = ff'(t)$, т.е. скорость точки в случае прямолинейного движения есть производная от пути по времени.

Формулы дифференцирования основных функций	
Производная постоянной величины	$c'=0$, где$c=const$
Производная степенной функции:	$(x^n)' = nx^{n-1}$., *n* – действительное число
Производная от аргумента:	$x' = 1$
Производная функции вида $y=\sqrt{x}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
y= sinx	$(sinx)'=cosx$
y = cosx	$(cosx)'=-sinx$
y = tgx	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
y = ctgx	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$

Производная логарифмической функции $y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Производная показательной функции $y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
Частный случай $y = e^x$:	$(e^x)' = e^x$
Производные обратных тригонометрических функцийу $y = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

1 Производная алгебраической суммы конечного числа функций:

$$(u+v-w)'=u'+v'-w',$$

где u, v и w — различные функции от x, имеющие производные по x.

2 Производная произведений двух функций: $(uv)'=u'v+v'u$,

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x.

3 Производная произведения постоянной на функцию: $(cu)'=cu'$, где $c=const$.

4 Производная частного (дроби): $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ где } c=const.$$

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x, считая, что $v^2 \neq 0$ при том значении аргумента x, при котором находится производная:

5 Производная сложной функции: если $y=f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x=y'_u u'_x y'_x=f(u)u'_x$$

Пример 16.1. Найти производную функции $y=(x+5)(x^2-1)$

Решение. Используя формулу $(uv)' = u'v + v'u$ –производная произведения двух функций, получим:

$$y' = (x+5)'(x^2-1) + (x+5)(x^2-1)',$$
$$y' = (x'+5')(x^2-1) + (x+5)(\left(x^2\right)' - 1'),$$
$$y' = (1+0)(x^2-1) + (x+5)(2x-0),$$
$$y' = x^2 - 1 - 2x(x+5),$$
$$y' = 3x^2 + 10x - 1.$$

Иначе, перемножая двучлены, функцию $y=(x+5)(x^2-1)$ можно записать так: $y=x^3+5x^2-x-5$; тогда $y'=(x^3)'+(5x^2)'-x'-5'$, $y'=3x^2+10x-1$

Ответ: $y' = 3x^2+10x-1$.

Пример 16.2.Найти производную функции $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

Решение. Перепишем функцию в виде $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$. По формулам производная алгебраической суммы и производная степенной функции продифференцируем функцию: $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$.:

$$y' = \left(6x^{\frac{1}{3}}\right)' - \left(4x^{\frac{1}{4}}\right)', \quad y' = 6 * \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 * \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1},$$

$$y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}}, \quad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Ответ: $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Пример 16.3. Найти производную функции $y=(x^2+3)^{10}$.

Решение. Это сложная функция. Пусть $x^2+3=u$, тогда $y=u^{10}$. Производная находится по формуле дифференцирования сложной функции:

$y'=(u^{10})'=10u^9u'_x$, $u'_x=(x^2+3)'=2x$,

$y'=10(x^2+3)^9 2x$, $y'=20x(x^2+3)^9$.

Ответ: $y'=20x(x^2+3)^9$.

Пример 16.4. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 + 1$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. Найти величину скорости в момент $t = 3c$ и величину ускорения в момент t = 4с.

Решение. Скорость равна $v = s'_t = (2t^3 + t^2 + 1)' = 6t^2 + 2t$,

$v_{t=3} = 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 60$ (м/с).

Ускорение равно $a = v'_t = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$,

$a_{t=4} = 12{*}4 + 2 = 50(м/с^2)$.

Ответ: $v_{t=3} = 60 м/с$, $a_{t=4} = 50\ м/с^2$.

Пример 16.5. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 2$ в точке, абсцисса которой равна 3.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_{x=3} = 3^2 - 4{\cdot}3 + 2 = -1$. Итак, точка касания M (3; - 1) найдена. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением пучка прямых $y - y_1 = k\,(x - x_1)$.

В нашем примере $x_1 = 3$, $y_1 = -1$, значит $y + 1 = k(x - 3)$.
Угловой коэффициент $k = y'_{x=3} = (x^2 - 4x + 2)'_{x=3} - (2x - 4)_{x=3} = 2$.

Поэтому искомое уравнение касательной примет вид:
$y + 1 = 2(x - 3)$ *или* $y = 2x - 7$ в общем виде $2x - y - 7 = 0$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Найти производную функции

1) x^9 2) x^{-12} 3) $x^{\frac{4}{5}}$ 4) $x^{-\frac{2}{3}}$ 5) $\frac{1}{x^{18}}$	6) $(2-5x)^4$ 7) $(-2x)^5$ 8) $(7x-1)^{-4} - 5x^4$ 9) $4x^5 + 6x - 7$ 10) $x^5 - 9x^3$ 11) $2x^2 + 3x^4$	12) $5x^6 - 2x$ 13) $5x - 2x^7$ 14) $7x^3 - 5x^2 + x - 2$ 15) $-2x^6 + 3x^4 - 4x + 6$ 16) $x + x^9 - 8$ 17) $\sqrt[4]{x^3}$

2. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = x^{-4}$, при $x_0 = 2$.

3. При каких значениях x производная функции $f(x) = x^5$ равна 5?

4. Найти такие значения x, при которых производная функции f(x) принимает указанное значение:

1) $f(x) = (x-3)^2,\ f'(x) = -3;$

2) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1,\ f'(x) = 0$

3) $f(x) = x^{-1},\ f'(x) = 1.$

5. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по

закону $x(t) = 2t^4 + 3$, в момент $t_0=3$.

6. Лифт после включения движется по закону $s=1{,}5t^2 + 2t + 12$, где s – путь (в метрах), t – время (в секундах). Найдите скорость лифта в момент времени t=2.

7. Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением $m = m_0e^{-kt}$, m – количество вещества в момент времени t, k – положительная постоянная. Найдите скорость разложения вещества и выразите ее как функцию времени.

8. Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x + 3$в точке с абсциссой x=2.

9. Вычислите острый угол, под которым парабола $y = x^2 - 9$ пересекает ось абсцисс.

Вариант 2.

1. Найти производную функции

1) $2x^8$ 2) x^{-11} 3) $x^{\frac{2}{3}}$ 4)$x^{-\frac{4}{5}}$ 5) $\frac{1}{x^{10}}$	6) $\sqrt[6]{x^5}$ 7) $(1-3x)^4$ 8) $(-5x)^3$ 9) $7x^3$ 10) $3x^6 + 5x - 8$ 11) $x^3 - 7x^5$	12) $(4x-3)^{-6}$ 13)$-4x^3 + 2x^4$ 14) $8x^7 - 6x$ 15) $7x - 3x^9$ 16) $5x^3 + 3x^2 - x + 9$ 17) $2x^7 + 6x^5 + 11x - 4$ 18) $x^4 - x + 5$

2. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = x^{-3}$, при $x_0 = 3$.

3. При каких значениях x производная функции $f(x) = x^3$ равна 3?

4. Найти такие значения x, при которых производная функции f(x) принимает указанное значение:

1) $f(x) = (2x+3)^2,\ f'(x) = 3;$

2) $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ f'(x) = 0$

3) $f(x) = x^{-1},\ f'(x) = -4.$

5.Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 - 5t$, в момент $t_0=4$.

6. Зависимость количестваQ вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q=a(1 + be^{-kt})$. Определите скорость реакции и выразите ее как функцию Q .

7. Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 16$в точке с абсциссой $x=5$.

8. Вычислите острый угол, под которым парабола $y = -x^2 + 6$ пересекает ось абсцисс.

Вариант 3

1. Найти производную функции

1) x^7 2) x^{-9} 3) $x^{\frac{4}{7}}$ 4) $x^{-\frac{2}{5}}$ 5) $\frac{1}{x^6}$	6) $(1-3x)^5$ 7) $(-3x)^4$ 8) $(5x+4)^{-3} - 4x^6$ 9) $3x^5 - 4x + 7$ 10) $x^5 + 4x^3$ 11) $2x^2 - 8x^4$	12) $7x^4 - 9x$ 13) $8x - 2x^4$ 14) $2x^3 - 6x^2 - x - 2$ 15) $-4x^5 + 7x^4 - 9x + 6$ 16) $x^6 - 8x + 6$ 17) $\sqrt[7]{x^5}$

2. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = x^{-5}$, при $x_0 = -2$.

3. При каких значениях x производная функции $f(x) = x^7$ равна 7?

4. Найти такие значения x, при которых производная функции f(x) принимает указанное значение:

1) $f(x) = (x-3)^2,\ f'(x) = -3;$

2) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1,\ f'(x) = 0$

3) $f(x) = x^{-1},\ f'(x) = 1.$

5.Размер популяции бактерий в момент времениt (время выражено в часах) задается формулой $p(t)= 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Найдите скорость роста популяции, когда t = 1 час.

6. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = \sqrt{t}$. Найти ускорение точки в конце 4-й секунды.

7. Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$в точке с абсциссой $x=4$.

8. Вычислите тупой угол, под которым парабола $y = 8 - x^2$ пересекает ось абсцисс.

Вариант 4

1. Найти производную функции

1) $2x^8$ 2) x^{-11} 3) $x^{\frac{2}{3}}$ 4)$x^{-\frac{4}{5}}$ 5) $\frac{1}{x^{10}}$	6) $\sqrt[6]{x^5}$ 7) $(1 - 3x)^4$ 8) $(-5x)^3$ 9) $7x^3$ 10) $3x^6 + 5x - 8$ 11) $x^3 - 7x^5$	12) $(4x - 3)^{-6}$ 13)$-4x^3 + 2x^4$ 14) $8x^7 - 6x$ 15) $7x - 3x^9$ 16) $5x^3 + 3x^2 - x + 9$ 17) $2x^7 + 6x^5 + 11x - 4$ 18) $x^4 - x + 5$

2. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = x^{-3}$, при $x_0 = 3$.

3. При каких значениях x производная функции $f(x) = x^3$ равна 3?

4. Найти такие значения x, при которых производная функции f(x) принимает указанное значение:

1) $f(x) = (2x + 3)^2,\ f'(x) = 3;$

2) $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ f'(x) = 0$

3) $f(x) = x^{-1},\ f'(x) = -4.$

5. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = \sqrt{t} + 5t$. Найти ускорение точки в конце 1-й секунды.

6. Атмосферное давление воздуха *p* на высоте над уровнем моря можно вычислить по формуле $p = p_0 e^{-h/a}$, p_0 – давление на уровне моря и *a* – постоян-

ная. Найдите скорость изменения давления с высотой и выразите ее как функцию p.

7. Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 6x + 8$в точке с абсциссой x=-2.

8. Вычислите тупой угол, под которым парабола $y = x^2 - 4$ пересекает ось абсцисс.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что такое мгновенная скорость?

2 Перечислите правила нахождения производной.

3 Что называется угловым коэффициентом функции в данной точке?

4 Чему равна производная показательной функции?

5 Что называется касательной к линии в данной точке?

3.17 Практическая работа №17 «Производная элементарных функций»

Учебная цель:

научиться вычислять производные элементарных функций с помощью правил дифференцирования и таблицы для производных; применять на практике понятие производной.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. Производной функции *y=f(x)* по аргументу *x* называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при условии, что последнее стремиться к нулю. Производная обозначается символами: y', y'_x, $f'(x)$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Продифференцировать данную функцию — значит найти ее производную.

Из определения производной непосредственно вытекает общий метод ее нахождения. Числовое значение производной данной функции $y = f(x)$ при данном числовом значении аргумента $x=a$ называется частным значением производной. Это записывается так:

$$y'(a),\ y'|_a,\ f'(a),\ y'_{x=a}.$$

Формулы дифференцирования основных функций	
Производная постоянной величины	$c'=0$, где $c=const$
Производная степенной функции:	$(x^n)'=nx^{n-1}$., n – действительное число
Производная от аргумента:	$x'=1$
Производная функции вида $y=\sqrt{x}$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$y=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$y=tgx$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
$y=ctgx$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$
Производная логарифмической функции $y=\ln x$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
Производная показательной функции $y=a^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
Частный случай $y=e^x$:	$(e^x)'=e^x$
Производные обратных тригонометричеких функций $y=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=arctgx$	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=arcctgx$	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

1 Производная алгебраической суммы конечного числа функций:

$$(u+v-w)'=u'+v'-w',$$

где u, v и w — различные функции от x, имеющие производные по x.

2 Производная произведений двух функций: $(uv)'=u'v+v'u$,

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x.

3 Производная произведения постоянной на функцию: $(cu)'=cu'$, где $c=const$.

4 Производная частного (дроби): $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ где } c=const.$$

где u и v — различные функции от $\boldsymbol{x}$, имеющие производные по x, считая, что $v^2 \neq 0$ при том значении аргумента x, при котором находится производная:

5 Производная сложной функции: если $y=f(u)$, где $u = \varphi(\text{x})$, то

$$y'_x = y'_u u'_x y'_x = f(u) u'_x$$

Алгоритм нахождения производной

1. Производную, которую требуется найти, нужно разбить на составные части.
2. Поставить полученные составные части в соответствие формулам из таблицы производных (сумма, произведение, частное, степенная функция, сложная функция и др.).
3. Пользуясь таблицей производных, найти производные составных частей выражения и подставить их в выражение.
4. Записать результат. (Если требуется выполните преобразования)

Пример 17.1. Продифференцировать функцию $y=sin8x$.

Решение. Пусть $8x=u$, тогда $y=sinu$.

$y'=(sinu)'=cosu*u'_x;\ \ u'_x=(8x)'=8$

$y'=cosu*8$ или $y'=8cos8x$

Ответ: $y'=8cos\ 8x$.

Пример 17.2. Найти производную функции $y = arctg\sqrt{4x-1}$

Решение. Пусть $\sqrt{4x-1} = u$, тогда $y = arctgu,$ и $y' = (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} * u'_x,$

$$u' = \left(\sqrt{4x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}(4x-1) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}},$$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{4x-1})^2} * \frac{2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{4x\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$$

Ответ: $y' = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$.

Пример 17.3. Продифференцировать функцию *y= ln sin x.*

Решение. *sin x = u, y=ln u*, тогда

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} * u'_x\ u'_x = (\sin x)' = \cos x,$$

$$y' = \frac{1}{\sin x} * \cos x = ctgx.$$

Ответ: $y' = ctgx$.

Пример 17.4. Дана функция $f(x) = 2^{x^2+x+1}$.Найти $f'(1)$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$f'(x) = 2^{x^2+x+1} \cdot (x^2+x+1)' \ln 2$

$f'(x) = 2^{x^2+x+1} \cdot (2x+1) \cdot \ln 2$

$f'(x) = 2^3 \cdot (2 \cdot 1+1) \cdot \ln 2$ $f'(1) = 24 \ln 2$

Ответ: $f'(1) = 24 \ln 2$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1) $f(x) = x^3 (x^2 - 1)^2$. 2) $f(x) = x^4/(x^2 - 12)$. 3) $y = 8^x - 4\ln(x+8)$.

4) $y = \sin(2x - 5)$. 5) $y = (5x+2)^{-6}$.

2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ в точках $x=0, x=-1, x=2$.

2) $y = \cos(3x - \frac{\pi}{2})$ в точках $x=0, x=\frac{\pi}{3}$.

3. Найти значения x, при которых значения производной ции $f(x) = \frac{2x}{x^3+3}$ отрицательные.

Вариант2

1. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x) = (2x^4 - 5x)(3sinx + 1)$. 2) $f(x) = \frac{7x-1}{x^2+3}$. 3) $f(x) = 5cosx\ 4^x$.

4) $y = 4 \cdot (3x-4)^{-6}$

2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$ в точках x =0, x =2.

2) $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$.

3. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3}$ положительны.

Вариант 3

1. Найдите производные следующих функций:

1) $y = x^2(x^2-3)$. 2) $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x$. 3) $y = 5e^{2-3x}$. 4) $y = \frac{2x - x^3}{x^2+5}$. 5) $y = \sqrt{x^2-2}$.

2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ в точках x =0, x =- 1, x =2.

2) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

3. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3}$ равны нулю.

Вариант 4

1. Найдите производные следующих функций:

1) $y = \frac{3x-4}{2x+3}$. 2) $y = x^2(x+2)$. 3) $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x$. 4) $y = \sqrt{2-x^3}$ 5) $y = \cos(3x-2)$.

2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2$ в точках x =0, x =2.

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{6}$.

3. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ равны нулю.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что называется сложной функцией?

2 Перечислите элементарные функции, какие Вы знаете.

3 Какие основные правила нахождения производной существуют?

4 Чему равна производная логарифмической функции?

3.18 Практическая работа № 18
«Исследование функции с помощью производной»

Учебная цель:

формировать умения в исследовании функций по ее производной, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Функции, у которых имеет место убывание или возрастание на некотором числовом промежутке, называются монотонными функциями.

Определение. Функция называется *возрастающей на интервале* $[a,b]$, принадлежащем области определения функции, если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют большие значения функции, т.е. если $x_1 > x_2$ выполняется $f(x_1) > f(x_2)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.

Определение. Функция называется *убывающей на интервале* $[a,b]$, если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют меньшие значения функции, т.е. если $x_1 > x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.

Теорема. Если во всех точках некоторого промежутка$f'(x) = 0$, то функция $f(x)$сохраняет в этом промежутке постоянное значение.(Этот промежуток может быть замкнутым или открытым, конечным или бесконечным).

Теорема (достаточный признак монотонности). Если во всех точках некоторого промежутка$f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в этом промежутке. Если во всех точках некоторого промежутка$f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Замечание. Условия теоремы не являются в полной мере необходимыми. Их можно несколько ослабить, а именно считать, что $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$, так как заключения теорем остаются справедливыми и тогда, когда производная обращается в нуль в конечном множестве точек.

Пример 18.1.Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

Решение. Находим производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9, f'(x) = 3(x^2 + 4x + 3),\ f'(x) = 3(x + 3)(x + 1).$$

(Для разложения квадратного двучлена на множители решали квадратное уравнение).

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции найдём точки, в которых $f'(x) = 0$. Такими точками являются *x=-3*, *x=-1*.

Исследуем знаки производной в промежутках, ограниченных этими точками.

От -∞ до -3 знак производной положительный, от -3 до -1 – знак отрицателен, от -1 до +∞ - положительный. Таким образом, функция возрастает на интервалах (-∞; -3) и (-1; ∞), убывает на интервале (-3; -1). (Рисунок 18.1).

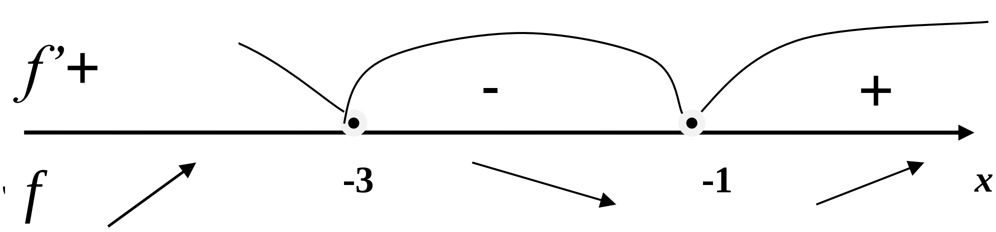


Рисунок 18.1

Пример 18.2. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Решение. Находим производную функции:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$, получаем точки, в которых производная функции равна нулю: $x_1=1-\sqrt{2}$; $x_2=1+\sqrt{2}$.

Исследуем знаки производной. От $-\infty$ до точки $x_1=1-\sqrt{2}$ знак положителен, от точки $x_1=1-\sqrt{2}$ до точки $x_2=1+\sqrt{2}$ знак отрицателен, от точки $x_2=1+\sqrt{2}$ до $+\infty$ знак положителен. Таким образом, промежутки возрастания данной функции $(-\infty; 1-\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2}; +\infty)$, а промежуток убывания - $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Определение. *Функция f(x) имеет минимум в точке x_0*, если существует такая окрестность точки, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)<f(x_0+\Delta x)$.

Функция f(x) имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство неравенство $f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$.

Из приведённых определений следует, что экстремум функции имеет локальный характер - это наибольшее и наименьшее значение функции по сравнению с близлежайшими значениями. На промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причём может оказаться, что какой-либо минимум функции больше какого-либо максимума. Следующая теорема позволяет ответить на вопрос, в каких точках функция может достигать экстремума.

Теорема Ферма (необходимый признак экстремума). Если функция *f(x)* дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная при $x=x_0$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет простое геометрическое истолкование. Так как производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, то равенство $f'(x_0) = tg\alpha = 0$ означает, что $\alpha = 0$, т. е. касательная к кривой в этой точке параллельна оси Ox.

Следствие. Дифференцируемая функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю.

Однако функция может иметь экстремум и в тех точках области определения, где производная не существует.

Те значения аргумента, при которых функция сохраняет непрерывность, а её производная обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками* (или критическими значениями аргумента).

Теорема Ферма является лишь необходимым признаком экстремума, так как не в каждой критической точке экстремум существует. Поэтому нужно располагать достаточными признаками, позволяющими судить, имеется ли в конкретной критической точке экстремум и какой именно - максимум или минимум.

Достаточный признак экстремума. Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$ и в некоторой окрестности этой точки слева и справа от неё производная имеет противоположные знаки, то $f(x_0)$ является экстремумом функции, причём:

1) максимумом, если $f'(x_0) > 0$ при $x<x_0$ и $f'(x_0) < 0$ при $x>x_0$;

2) минимумом, если $f'(x_0) < 0$ при $x<x_0$ и $f'(x_0) > 0$ при $x>x_0$.

Если же вблизи точки x_0, слева и справа от неё, производная сохраняет знак, то это означает, что функция либо только убывает, либо только возрастает в некоторой окрестности точки x_0. В этом случае в точке x_0 экстремума нет. Таким образом, если x_0 - критическая точка $f(x)$ и при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 есть точка экстремума, причём точка максимума, если производная меняет знак с плюса на минус, и точка минимума, если с минуса на плюс. В противном случае в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм нахождения экстремумов функции

1) Найти область определения функции.

2) Найти производную функции.

3) Найти критические точки.

4) Определить знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения.

5) Найти точки экстремума, учитывая характер изменения знака производной.

6) Найти экстремумы функций.

Пример 18.3. Исследовать на экстремум функцию$y = 0{,}25x^4 - x^3$ и построить её график.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Её производная$y' = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$существует также на всей числовой прямой. Поэтому в данном случае критическими точками служат лишь те, в которых $y'=0$, т.е. $x^2(x-3) = 0$, откуда $x=0$ и $x=3$. Критическими точками разбивают всю область определения функции на три интервала монотонности.

Выберем в каждой из них по одной контрольной точке и найдём знак производной в этой точке (или обобщенным методом интервалов определим знаки производной на каждом полученном интервале). Для интервала (-∞; 0), контрольной точкой может служить $x=-1$ находим $f'(-1)<0$. Взяв в интервале (0; 3), точку $x=1$, получим $f'(1)<0$, а взяв в интервале (3; +∞), точку$x=4$, имеем $f'(4)>0$ (Рисунок 18.2).

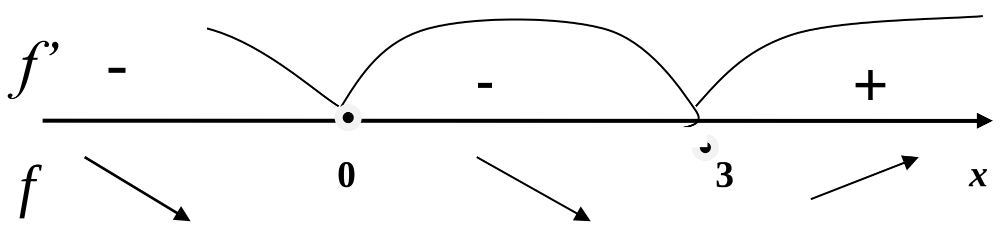


Рисунок 18.2

Итак, по достаточному признаку экстремума, в точке $x=0$ экстремума нет (так как производная сохраняет знак в интервале (-∞; 3), а в точке $x=3$ функция имеет минимум (поскольку производная при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс). Найдём соответствующие значения функции: $f(0)=0$, а $f(3)=6{,}75$. В интервале (-∞; 3) функция убывает, так как в этом интервале $f'(x)<0$, а в интервале(3; +∞) возрастает, так как в этом интервале $f'(x)>0$.

Чтобы уточнить построение графика, найдём точки пересечения его с осями координат. При $y=0$ получим уравнение $0{,}25x^4 - x^3 = 0$, корни которого $x=0$, $x=4$, т. е. найдены две точки (0; 0) и (4; 0) графика функции. Используя все полученные сведения, строим график (Рисунок 18.3).

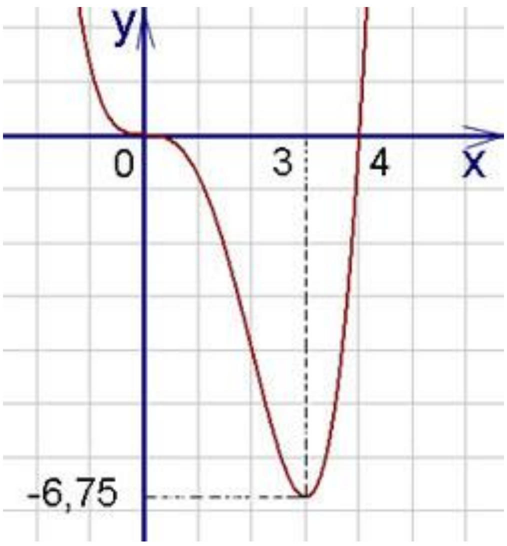


Рисунок 18.3

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1)Найти критические точки функции.

2) Найти значения функции в критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$.

3)Найти значения функции на концах отрезка $[a; b]$.

4) Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 18.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^3-12x+7 \text{ на отрезке } [-3, 0].$$

Решение.

1) Ищем производную и приравниваем её нулю:

$$y'=3x^2-12,\ 3(x^2-4)=0.$$

Корни уравнения $x=\pm 2$ являются критическими точками, но промежутку принадлежит только $x=-2$.

2) Подсчитываем значение функции в критической точке $y(-2)=23$.

3) Подсчитываем значения функции на концах промежутка: $y(-3)=16$ и $y(0)=7$.

4) Среди них наибольшее $y(-2)=23$, наименьшее $y(0)=7$.

Ответ: $y_{наибол.}(-2)=23$, $y_{наимен.}(0)=7$ на отрезке $[-3, 0]$.

Схема исследования:

1. Определить область определения.
2. Определить четность или нечетность функции.
3. Найти первую производную.
4. Найти критические точки.
5. Исследовать функцию на монотонность.
6. Найти значения функции в критических точках.
7. Построить график функции.
8. При необходимости определить координаты дополнительных точек графика функции.

Задания для самостоятельной работы

Вариант1

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции, исследовать на экстремум функцию и построить ее график $y=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{3}$.

2. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

3. Найдите точки экстремума и экстремум функции.

а) $y=5+9x-\frac{x^3}{3}$; б) $y=\frac{16}{x}+x+3$;

в) $y=(x-2)^2e^{x-6}$;   г) $h(a)=\sqrt{5-4a-a^2}$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции.

а)$y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$на отрезке [1; 9];

б) $f(x)=8ln(x+7)-8x+3$на отрезке [-6,5; 0];

в) $g(t)=7\sin t-8t+9$на отрезке [-3π/2; 0].

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции, исследовать на экстремум функцию и построить ее график $y=x^4-2x^3+1$.

2. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$.

3. Найдите точки экстремума и экстремум функции.

а) $y=4x^3+9x^2+6x-1$;   б) $y=-\frac{x}{x^2+1}$;

в) $y=2x-ln(x+3)\quad+7$;   г) $h(u)=9^{x^2+2x+3}$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

а)$y=3x-2x\sqrt{x}$на отрезке [0; 4];

б) $f(x)=(8-x)e^{x-7}$на отрезке [3; 10];

в) $g(t)=9\cos t+14t+7$на отрезке [0; 3π/2].

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что означает монотонность функции?

2 Изобразите графически точки экстремума функции?

3 Какие признаки точек экстремума знаете?

4 Как определить наибольшее и наименьшее значения функции?

3.19 Практическая работа № 19
«Интеграл и первообразная»

Учебная цель:

выработать навыки нахождения неопределенного интеграла функции, умения пользоваться свойствами при интегрировании.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:

тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:

1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. *Первообразной функцией* для функции *f(x)* называется такая функция *F(x)*, производная которой равна данной функции:

$$F'(x) = f(x).$$

Обозначение

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$. Функция *f(x)* называется подынтегральной функцией, а выражение *f(x)dx* - подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции *f(x)* называется интегрированием функции *f(x)*. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла. Неопределенный интеграл *F(x)+C* представляет собой семейство параллельно расположенных кривых, где каждому конкретному числовому значению постоянной C соответствует определенная кривая из указанного семейства.

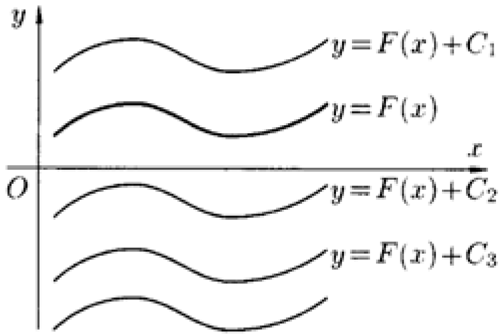


График каждой кривой из семейства называется *интегральной кривой*.

Свойства неопределенного интеграла

1°. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2°. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3°. Постоянный множитель можно вынести из под знака интеграла, т.е. если $k = const \neq 0$, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ .$$

4°. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти функцию по ее дифференциалу$dy = (6x^2 - 8x^3 - x + 1)dx$, если функция примет значение 4 при x=2.

2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} dx$; б) $\int (4x^3 + 6x^2 - 2x - 1)dx$;

в) $\int \left(3sin4x - cos\frac{4x}{5}\right)dx$; г) $\int \left(\frac{2}{cos^2 2x} - \frac{3}{2}\right)dx$;

д) $\int \left(4^{2x-3} + \frac{5}{4-x}\right)dx$; е) $\int \frac{dx}{3+4x^2}$.

3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 1 - 10t + 3t^2$. Найдите закон движения точки, если за время t=1 она пройдет путь s=20 м.

Вариант 2

1. Найти функцию по ее дифференциалу$dy = (4x^2 + x^3 + 5x - 3)dx$, если функция примет значение 8 при x=-1.

2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$; б) $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$;

в) $\int \left(sin5x + 2cos\frac{7x}{3}\right)dx$; г) $\int \left(\frac{1}{sin^2 x/2} - 1\right)dx$;

д) $\int \left(e^{3-2x} + \frac{4}{4+6x}\right)dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 8t^3 + 3t^2 - 1$. Найдите закон движения точки, если за время t=1 она пройдет путь s=6 м.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какая связь между производной и первообразной?

2 В чем заключается геометрический смысл неопределенного интеграла?

3 Для всех функций существует первообразная?

3.20 Практическая работа № 20
«Формула Ньютона Лейбница. Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей»

Учебная цель:
выработать навыки нахождения неопределенного интеграла функции, умения пользоваться свойствами при интегрировании.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. *Определённым интегралом* от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a; b]$ называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке.

В общем виде определенный интеграл записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

где *нижний предел интегрирования* обозначается буквойa, *верхний предел интегрирования* обозначается буквой b. Отрезок$[a; b]$называется*отрезком интегрирования*.

Решить определенный интеграл – это значит, найти число по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию$F(x\ )$(неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константаCв определенном интеграле не добавляется. Обозначение$|_a^b$является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись $F(x)|_a^b$? Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию.

4) Рассчитываем разность$F(b) - F(a)$, то есть, находим число.

Свойства определенного интеграла

1^0.Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2^0.Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3^0.Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

4^0.Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

5^0.Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6^0.При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt.$$

Пример 20.1. Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 2)dx$.

Решение.

$$\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 1)dx = 5\int_0^1 x^5 dx + 4\int_0^1 x^3 dx - 5\int_0^1 xdx - 2\int_0^1 dx = \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{5\cdot 1^6}{6} + \frac{4\cdot 1^4}{4} - \frac{5\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1\right) - 0 = -4\frac{1}{3}.$$

Пример 20.2.Вычислите определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 20.3.Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение.

Используя формулу таблицы основных интегралов, получим

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}arctg 0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{\pi}{18}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислить интегралы.

а) $\int_{-1}^{1}(3x^3-6x^2-4x-1)dx.$ б) $\int_{-1}^{1}\left(3\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

в) $\int_{0}^{\pi/8}\left(\frac{4}{cos^2 2x}+3\right)dx.$ г) $\int_{-1}^{0}(e^{-2x}+3^{2x}+1)dx.$

д) $\int_{0,5}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{1+4x^2}.$ е) $\int_{1}^{3}\left(\frac{5}{2x-1}+x^2(7-x)\right)dx.$ ж) $\int_{-\pi/3}^{0}\left(sin6x+2cos\frac{x}{2}\right)dx.$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните чертежи.

а) $y=9-x^2$, y=0.

б)$y=0{,}25x^3$, y=2x.

в) y=cos x, y=0, x=0, x=π/2.

Вариант 2

1. Найти интегралы:

а) $\int_{2}^{3}(3x^2-4x-1)dx.$ б) $\int_{1}^{4}\left(2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

в) $\int_{-\pi/2}^{0}\left(cos5x+2cos\frac{x}{3}\right)dx.$ г) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\frac{1}{sin^2 x/2}-1\right)dx.$

д)$\int_{0}^{1,5}\left(e^{3-2x}+\frac{4}{4+6x}\right)dx.$ е) $\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$ ж) $\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{3x-1}+4x^3(5-x)\right)dx.$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните чертежи.

а) $y=x^2-4x$, y=0.

б) $y=x^2$, y=4x-3.

в) y=$1/$ x, y=0, x=1, x=6.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы.

а) $\int_{-2}^{1}(5x^4+6x^2-3x-1)dx.$ б) $\int_{1}^{2}\left(3\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}-2\right)dx.$

в) $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\left(\frac{5}{sin^2 2x}+2\right)dx$. г) $\int_{-2}^{0}(2e^{-x}+4^{2x}-3)dx$.

д) $\int_{0}^{2,5}\frac{dx}{25+4x^2}$. е) $\int_{0}^{3}\left(\frac{2}{4x+1}+2x^3(1-x)\right)dx$. ж) $\int_{-\pi/10}^{0}\left(cos5x+2sin\frac{x}{2}\right)dx$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните чертежи.

а) $y=x^2+4x-5$, $y=0$.

б)$y=2/x$, $y=3-x$.

в) $y=2sin\,x$, $y=0$, $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$.

Вариант 4

1. Найти интегралы:

а) $\int_{-2}^{1}(3x^2-4x-1)dx$. б) $\int_{1}^{4}\left(2\sqrt{x^3}+3\sqrt[4]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

в) $\int_{-\pi/4}^{0}\left(cos5x+2cos\frac{x}{3}\right)dx$. г) $\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(\frac{1}{sin^2 x/3}-1\right)dx$.

д)$\int_{0}^{1}\left(e^{2-3x}+\frac{4}{4+6x}\right)dx$. е) $\int_{-1/3}^{1/6}\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$. ж) $\int_{2}^{3}\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}+4x^3(5-x)\right)dx$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните чертежи.

а) $y=-x^2+5$, $y=0$.

б) $y=1/x^2$, $y=4$, $x=-5$, $x=5$.

в) $y=3cosx$, $y=0$, $x=-\pi$, $x=\pi$.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какая связь между производной и первообразной?

2 В чем заключается геометрический смысл неопределенного интеграла?

3 В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

3.21 Практическая работа № 21
«Классическое определение вероятности. Теорема о сумме вероятностей»

Учебная цель:
выработать навыки вычисления вероятности, используя элементы комбинаторики, теоремы сложения и умножения вероятностей.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Опыт, эксперимент, наблюдение является *испытанием*.

Результат, исход испытания, называется *событием*. Для обозначения событий используют прописные буквы латинского алфавита: A, B, C, D и т.д.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том испытании.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том испытании.

Два события называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Два события называются *достоверными*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Событие называется *случайным*, если объективно может наступить ине наступить в данном испытании.

Определение. *Вероятностью* события А называется отношение числа исходов благоприятствующих событию А к общему числу всех возможных элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

гдеm – число исходов, благоприятствующих событию А; n – общее число всех возможных элементарных исходов.

Свойства вероятности

1^0. $0 \le P(A) \le 1$.

2^0. $P(A) = 0 <=> A$– невозможное событие

3^0. $P(A) = 1 <=> A$ – достоверное событие;

4^0. $0 < P(A) < 1 <=> A$ – случайное событие.

Суммой событий А и В называется событие А + В, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий: либо А, либо В, либо обоих этих событий.

Если события А и В несовместны, то их сумма А + В состоит в появлении *только одного* из этих событий: либо А, либо В.

Произведением событий А и В называется событие А·В, состоящее в совместном появлении этих событий.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности,* если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Два события называются *зависимыми,* если вероятность появления одного из них зависит от появления или не появления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже произошло.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

№	Теоремы сложения	Сущность
1	$P(A + B) = P(A) + P(B)$	Вероятность появления **одного из двух несовместных** событий.
2	$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$	Вероятность появления **одного из нескольких попарно несовместных** событий.
3	$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$	Вероятность появления **хотя бы одного из двух совместных** событий.
4	$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot (_n)$	Вероятность появления **хотя бы одного из нескольких совместных, независимых в совокупности** событий.
	Теоремы умножения	**Сущность**
5	$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$	Вероятность **совместного** появления **двух независимых** событий.
6	$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$	Вероятность **совместного** появления **нескольких независимых в совокупности** событий.
7	$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$	Вероятность **совместного** появления **двух зависимых** событий.
8	$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) \cdot \ldots\ldots \cdot P_{A1A2A3\ldots A(n-1)}(A_n)$	Вероятность **совместного** появления **нескольких зависимых** событий.

Пример 21.1.В урне находятся шары, отличающиеся только цветом: 5 белых, 11 черных и 8 красных. Вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета, если:

а) выборка шаров бесповторная;

б) выборка – повторна.

Решение.

Опыт: вынимаются из урны два шара.

Событие A - оба шара одного цвета.

B_i – вынут белый шар в i-ый раз;

C_i – вынут черный шар i-ый раз;

D_i – вынут красный шар в i-ый раз (i=1,2).

$$A = B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2$$

а) События $B_1 и B_2; C_1 и C_2; D_1 и D_2$ - зависимые, т.к. первый шар после фиксации цвета, перед отбором следующего, в урну не возвращается. Тогда

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2 / B_1) + P(C_1) \cdot P(C_2 / C_1) + P(D_1) \cdot P(D_2 / D_1) =$$
$$= \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} + \frac{11}{24} \cdot \frac{10}{23} + \frac{8}{24} \cdot \frac{7}{23} \approx 0.337$$

б) События $B_1 и B_2; C_1 и C_2; D_1 и D_2$ – независимые, т.к. первый шар, перед отбором следующего, возвращается в урну. Тогда

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) + P(C_1) \cdot P(C_2) + P(D_1) \cdot P(D_2) = \frac{5}{24} \cdot \frac{5}{24} + \frac{11}{24} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{24} \cdot \frac{8}{24} \approx 0.365$$

Ответ: а) $P(A) \approx 0.337$, б) $P(A) \approx 0.365$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

2. Дважды брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков не превзойдет четырех.

3. При транспортировке из 1000 дынь испортилось пять. Чему равна относительная частота испорченных дынь?

4. В урне три белых и пять красных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынутые шары будут: а) белого цвета, б) разного цвета?

5. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,25, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,3, «удовлетворительно» - 0,15. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

6. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают из колоды две карты. Определите вероятность того, что вторым вынут туз, если первым вынут король.

7. В коробке находятся шесть новых и три израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

8. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найдите вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

9. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбирают одну за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке будет меньше, чем на первой?

10. Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 4 с дефектами, берут наудачу три детали. Чему равна вероятность того, что а) все три детали без дефектов; б) по крайней мере одна деталь без дефектов?

Вариант 2

1. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил шесть нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

2. В урне четыре синих и три красных шара. Из урны вынимают три шара. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров будут: а) только красные, б) два синего цвета?

3. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: пять с первого, четыре со второго, семь с третьего, шесть с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик со второго или третьего склада?

4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

5. В урне четыре белых и три черных шара. Из урны вынимают два шара по одному, не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления черного

шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

6. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,65, вторым – 0,7. Найдите вероятность поражение цели а) двумя пулями; б) одной пули вторым стрелком.

7. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,74. Найдите вероятность того, что из трех накладных только две оформлены правильно.

8. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго – 0,08. Найдите вероятность сбоя в работе предприятия.

9. Брошены два одинаковых игральных кубика. Найдите вероятность того, что цифра шесть появится хотя бы на одной грани.

10.Слова «карета», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой. Какова вероятность получить при таком извлечении слово «ракета»?

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Приведите примеры невозможного и достоверного событий.

2 Являются ли несовместными события: А – появление двух очков, В - появление четного числа очков при бросании игральной кости?

3 Что называется уловной вероятностью?

4 Какие события называются независимыми? Приведите пример.

3.22 Практическая работа № 22
«Представление числовых данных. Прикладные задачи»

Учебная цель:
выработать навыки представления числовых данных и вычисления средних значений.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. *Генеральной совокупностью* называется множество возможных значений изучаемой случайной величины $\boldsymbol{X}$ с законом распределения $\boldsymbol{F(X)}$. Возможные значения генеральной совокупности $\boldsymbol{X}$ называются ее *элементами*. Закон распределения $\boldsymbol{F(X)}$ называется *генеральным законом распределения*, а числовые характеристики $\boldsymbol{X}$ – *генеральными числовыми характеристиками.*

Определение. *Выборочной совокупностью* или *выборкой* называется совокупность случайно отобранных элементов их генеральной совокупности. *Объемом выборки* называется число ее элементов.

Обычно выборка представляет собой множество чисел, расположенных в беспорядке. Для дальнейшего изучения выборку подвергают обработке.

Определение. Наблюдаемые значения выборки называются *вариантами*. Последовательность всех вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Определение. *Статистическим рядом* называется вариационный ряд с указанием соответствующих частот или относительных частот.

В общем случае статистический ряд представляют в виде таблиц.

Варианты $\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_k}$
Частоты $\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	…	$\boldsymbol{n_k}$

Варианты $\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_k}$
Относительные частоты $\boldsymbol{W_i = \frac{n_i}{n}}$	$\boldsymbol{\frac{n_1}{n}}$	$\boldsymbol{\frac{n_2}{n}}$	…	$\boldsymbol{\frac{n_k}{n}}$

Статистический ряд можно изобразить графически в виде *полигона частот* или *полигона относительных частот*, что позволяет получить наглядное представление о закономерности варьирования наблюдаемых значений случайной величины. В прямоугольной системе координат наносят точки с координатами ($\boldsymbol{x_i}$,$\boldsymbol{n_i}$) или ($\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{W_i}$), полученные точки соединяют отрезками, полученную ломанную называют полигоном.

Статистический ряд графически можно изобразить в виде *кумулятивной кривой* (кривой сумм — кумуляты). При построении кумуляты дискретного вариационного ряда на оси абсцисс откладывают варианты $\boldsymbol{x_i}$, а по оси ординат соответствующие им накопленные частоты $\boldsymbol{\mu_i}$. Соединяя точки с координатами ($\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{\mu_i}$) отрезками прямых, получаем ломаную (кривую), которую называют кумулятой. Для получения накопительных частот и дальнейшего построения точек ($\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{\mu_i}$) составляется расчетная таблица.

Варианты $\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_k}$
Относительные частоты $\boldsymbol{W_i = \frac{n_i}{n}}$	$W_1 = \frac{n_1}{n}$	$W_2 = \frac{n_2}{n}$	…	$W_k = \frac{n_k}{n}$
Накопительные относительные частоты $\boldsymbol{\mu_i = \mu_{i-1} + W_i}$	$\mu_1 = W_1$	$\mu_2 = \mu_1 + W_2$	…	$\mu_k = \mu_{k-1} + W_k$

График кумуляты дает представление о графике функции распределения ***F(X)*** генеральной совокупности.

Пусть x_1, x_2, ..., x_n— результаты независимых наблюдений над генеральной совокупностью *X*. Если количество наблюдений *n* достаточно большое ($n > 30$), то результаты наблюдений сводят в интервальный статистический ряд с определенным числом интервалов $\boldsymbol{k}$

Сформированный интервальный вариационный ряд записывают в виде таблицы

Варианты-интервалы $[\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_{i+1}})$	$[\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1})$	$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$	...	$[\boldsymbol{a_{k-1}}, \boldsymbol{a_k}]$
Частоты $\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	...	$\boldsymbol{n_k}$

Интервальный вариационный ряд изображают геометрически в виде гистограммы частот $\boldsymbol{n_i}$ или гистограммы относительных частот$\boldsymbol{W_i} = \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{n}}$.

Гистограммой называется ступенчатая фигура, для построения которой по оси *Ox* откладывают отрезки, изображающие частичные интервалы$(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_{i+1}})$варьирования признака *X*, и на этих отрезках, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными частотам или относительным частотам соответствующих интервалов.

Статистические характеристики выборки

Пусть выборка объема *n*представлена в виде статического ряда

Варианты$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_k}$
Частоты $\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	…	$\boldsymbol{n_k}$

Определение. *Модой* M_o называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Например, для данного статистического ряда M_o=14

x_i	4	8	14	19
n_i	3	4	6	5

Определение. *Медианой* M_e называют варианту, которая делит статистический ряд на равные части.

При нечетном объеме выборки $n = 2k + 1$ (нечетном числе столбцов в дискретном статистическом ряде) медиана равна серединному члену статистического ряда. Например, для статистического ряда

x_i	3	5	8	12	15
n_i	6	2	4	5	8

M_e=8.

При четном объеме выборки $n = 2k$ (четном числе столбцов в дискретном статистическом ряде) медиана находится по формуле

$$M_e = \frac{1}{2}\,(x_k + x_{k+1}).$$

Здесь x_k — варианта, которая находится слева от середины статистического ряда, а x_{k+1} — слева от нее. Например, для выборки

x_i	2	5	7	10	12	14
n_i	3	4	8	2	3	6

$M_e = \frac{1}{2}(7 + 10) = 8{,}5.$

Выборочное среднее$\bar{x} = \frac{1}{n}\,(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k)$.(средний показатель выборки).

Пример 22.1.

В результате независимых измерений получены данные:

2,1	2,3	4,2	3,7	5,5	5,3	3,4	4,7	4,4	2,6
4,3	4,3	5,6	4,5	4,8	5,2	4,8	4,3	3,4	4,3
4,5	2,2	3,4	4,5	4,5	3,4	3,6	4,1	3,2	2,8
4,3	3,5	5,3	4,6	3,9	3,5	5,7	5,1	4,2	5,8
2,7	4,2	4,8	3,6	3,8	5,9	3,7	2,4	4,1	5,1

1) Объем выборки n=50. Для построения интервального ряда возьмемk=6.

2)Просматривая приведенные результаты наблюдений, находим наименьшее значение выборки $x_{min} = 2{,}1$, наибольшее значение выборки $x_{max} = 5{,}9$. Размах варьирования $R = x_{max} - x_{min} = 5{,}9 - 2{,}1 = 3{,}8$.

3)Длина частичного интервала $h = \frac{R}{k} = \frac{3{,}8}{6} \approx 0{,}63$, hокруглим доd=0,7.

4) Вычислим $a_0 = x_{min} - 0{,}5h$= 2,1-0,5·0,63≈1,8,
получим интервалы

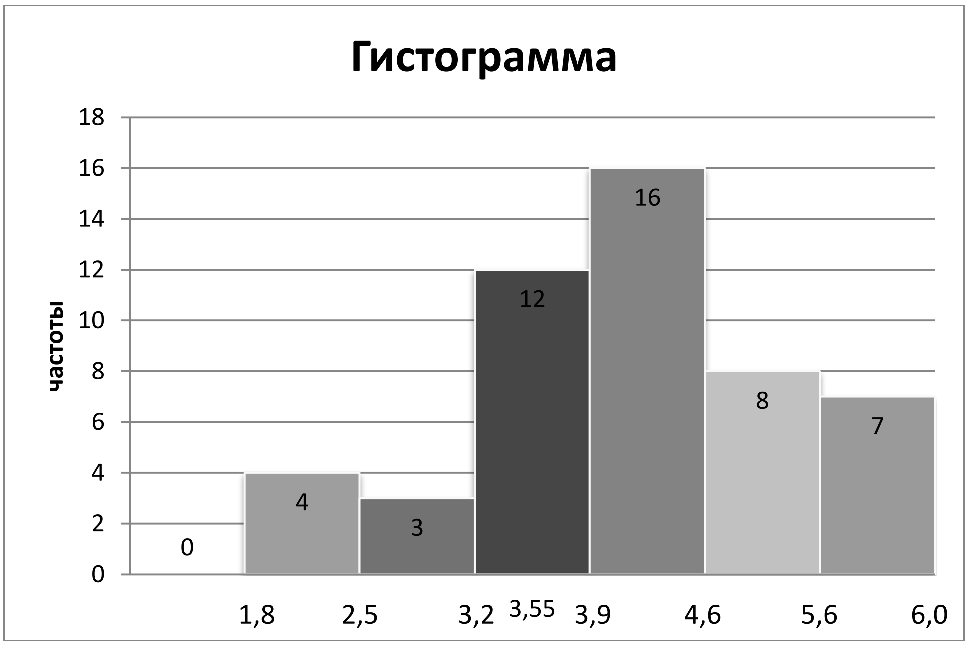
[1,8; 2,5), [2,5; 3,2), [3,2; 3,9), [3,9; 4,6), [4,6; 5,3), [5,3; 6,0].

5)Просматривая результаты наблюдений, определим количество значений признака в каждом полученном интервале. Это можно выполнить в виде таблицы.

№ п/п $\boldsymbol{i}$	**Интервалы** $[\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_{i+1}})$	**Рабочее поле**	**Частота** $\boldsymbol{n_i}$	**Относительная частота** $\boldsymbol{W_i}$
1	[1,8; 2,5)	1111	4	0,08
2	[2,5; 3,2)	111	3	0,06
3	[3,2; 3,9)	~~11111111~~ 11	12	0,24
4	[3,9; 4,6)	~~111111111111~~ 1	16	0,32
5	[4,6; 5,3)	~~1111~~ 111	8	0,16
6	[5,3; 6,0]	~~1111~~ 11	7	0,14
Сумма			**50**	**1**

При вычислении относительных частот округление результатов следует проводить таким образом, чтобы общая сумма относительных частот была равна 1.

Построим гистограмму частот интервального статистического ряда.



Определим статистические характеристики для выборки. Представим интервальный статистический ряд в виде дискретного ряда, заменив каждый интервал на соответствующую середину.

№ п/пi	Интервалы $[a_i, a_{i+1})$	Середины интервалов x_i	Частота n_i	Относительная частота W_i

1	[1,8; 2,5)	2,15	4	0,08
2	[2,5; 3,2)	2,85	3	0,06
3	[3,2; 3,9)	3,55	12	0,24
4	[3,9; 4,6)	4,25	16	0,32
5	[4,6; 5,3)	4,95	8	0,16
6	[5,3; 6,0]	5,65	7	0,14
Сумма			50	1

Вычисления можно оформить в виде таблицы.

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i n_i x_i = x_i^2 n_i$
1	2,15	4	8,6	18,49
2	2,85	3	8,55	24,3675
3	3,55	12	42,6	151,23
4	4,25	16	68	289
5	4,95	8	39,6	196,02
6	5,65	7	39,55	223,4575
Сумма		**50**	**206,9**	**902,565**

Вычислим статистические характеристики для выборки, используя полученные значения:

мода M_o=4,25 (т.к. наибольшая частота n_4=16),

медиана $M_e = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) = \frac{1}{2}(3{,}55 + 4{,}25) = 3{,}9$,

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k) = \frac{1}{50} \cdot 206{,}9 = 4{,}12$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обративших в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10, с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Составьте вариационный ряд; постройте полигон частот, кумулянту; найдите средние значения.

Вариант 2

На фирме работают 39 человек. Проведено исследование числа рабочих дней, пропущенных каждым работником фирмы в течение месяца. Результаты этого исследования таковы:

0, 1, 3, 0, 2, 3, 5, 7, 3, 5, 2, 10, 7, 5, 0, 2, 5, 10, 5, 3, 1, 9, 15, 10, 1, 0, 2, 5, 7, 7, 6, 5, 3, 0, 7, 10, 13, 0.

Составьте вариационный ряд; постройте полигон частот, кумуляту; найдите средние значения.

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что такое генеральная совокупность, выборка?

2Сформулируйте алгоритм построения статистического ряда.

3 Как называется графическое изображение статистического ряда?

4Дайте определение кумуляты и расскажите о ее назначении.

5 Что такое размах варьирования?

6 Какие средние значения выборки знаете?

3.23 Практическая работа № 23
«Уравнения и системы уравнений»

Учебная цель:
выработать навыки владения стандартными приемами решения рациональных, иррациональных, степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и систем уравнений.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Уравнение – это равенство с одной переменной называется уравнением с одной переменной. Если нужно найти те значения переменной, при которых получается верное числовое равенство.

Корнем или *решением уравнения* называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Уравнения называются *равносильными*, если множества их решений равны.

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax + в = 0$, где a и $в$ - действительные числа.

Решением линейных уравнений и уравнений. Сводящихся к линейным. Основано на следующих теоремах:

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 23.1. Решить уравнение $6-2x-\frac{2-5x}{3}=\frac{6x-4}{5}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 15, получим:

$$6-2x-\frac{2-5x}{3}=\frac{6x-4}{5}\quad (\cdot 15)\Rightarrow 90-30x-10+25x=18x-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30x+25x-18x=-12-90=10\Rightarrow -23x=-92\Rightarrow x=\frac{-92}{-23}=4$$

Ответ: $x = 4$.

Линейное уравнение $ax + в = 0$ может иметь только одно решение или совсем не иметь решений. Или иметь бесконечное множество решений. Пояснить на примерах.

1) уравнение 5x + 10 = 0 имеет единственное решение: x = -10:5 = - 2; x = -2;

2) уравнение 3x = 0 имеет единственное решение: x = 0;

3) уравнение 0*x + 2 = 0 не имеет решения, так как при любом значении x произведение $0*x=0$ и $0+2\neq 0$;

4) уравнение 0*x =0 имеет бесчисленное множество решений. Любое число является решением уравнения.

К линейным уравнениям приводятся и некоторые уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решите уравнения

а) $\frac{2x-9}{2x-5}-\frac{3x}{2-3x}=2$ б) $\frac{1}{x-2}-\frac{3-x}{x-2}+3=0$ в) $(2x-1)^3=-27$

2.Решите систему линейных уравнений с двумя неизвестными различными способами. Изобразите на координатной плоскости множество решений.

а) $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 5y = 24 \end{cases}$;   *б)* $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 10x - 4y = 2 \end{cases}$;   *в)* $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 5y - 6z = 28 \\ x - 2z = 7 \end{cases}$

3. Решите логарифмические уравнения.

а) $log_4(x + 10) = 2$ б) $log_x\ 2 + log_x 3 = 1/3$ в) $3.\ lg^2 x + lg x^2 = lg^2 - 1$

г) $log_x(3 + x) + log_x 4 = 0$ д) $log_{12}(x^2 - x) = 1$

е) $log^2_{0,3}(x+1) - 4\ log_{0,3}(x+1) + 3 = 0.$

4. Решите тригонометрические уравнения.

а) $3\ sin^2 2x + 7cos2x - 3 = 0$

б) $\sqrt{13 - 8tgx} = 6tgx - 3$

Вариант 2

1. Решить уравнения.

а) $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{3(3x-1)}{(x-3)(x+3)}$ б) $6 - 2x - \dfrac{2-5x}{3} = \dfrac{6x-4}{5}$ в) $(4x + 1)^3 = 8$

2.Решите систему линейных уравнений с двумя неизвестными различными способами. Изобразите на координатной плоскости множество решений.

а) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$;   *б)* $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ 12x - 4y = 2 \end{cases}$;   *в)* $\begin{cases} 8x - 6y = 14 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5y + 6z = 28 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$

3. Решите логарифмические уравнения.

а) $log_5(x + 8) = 2$б) $log_2\ x + log_8 x = 8$в) $3.\ 2\ log_x 25 - 3\ log_{25} x = 1$

г) $lg(7x - 9)^2 + lg(3x - 4)^2 = 2$д) $log_7(x^2 + 6x) = 1$

е) $log^2_{0,6}(x + 3) + log_{0,6}(x - 3) = 6$

4. Решите тригонометрические уравнения.

а) $cos2x - 5sinx - 3 = 0$

б) $\frac{tg(2-x)}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}} = 0$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Что означает фраза «решить уравнение»?

2 Какие преобразования называются тождественными?

3 Сколько решений имеет уравнение третьей степени?

4 Приведите примеры простейших тригонометрических уравнений с решением.

3.24 Практическая работа № 24
«Неравенства, основные приемы их решения»

Учебная цель:
выработать навыки владения стандартными приемами решения рациональных, иррациональных, степенных, показательных, логарифмических неравенств и систем неравенств.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Неравенства вида $a < b, a \leq b, a > b, a \geq b$, где a и b – числа (числовые выражения), называются *числовыми.*

Неравенства вида $f(x) < g(x), f(x) \leq g(x), f(x) > g(x), f(x) \geq g(x)$, где $f(x)\ и\ g(x)$называются *неравенствами с одной переменной*.

Неравенства, содержащие знаки $>$ или $<$ называют строгими, а содержащие знаки $\leq$ или $\geq$ - нестрогими.

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной, при подстановке которого неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадает. В частности, равносильны все неравенства, не имеющие решений.

Теоремы о равносильности неравенств с переменными

1. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$.
2. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$, если $\varphi(x)$ имеет смысл в области определения неравенства $f(x) < g(x)$.
3. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x) > 0$ для всех значений x из области определения $f(x) < g(x)$.
4. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x) < 0$ для всех значений x из области определения $f(x) < g(x)$.
5. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$.
6. $\mathrm{f(x)} > g(\mathrm{x}) \Leftrightarrow \mathrm{f^n(x)} > \mathrm{g^n(x)}$, где $\mathrm{f(x), g(x); n} \in \mathrm{N}$.

Рациональным неравенством называется неравенство, которое содержит только рациональные функции. Например: $P_n(x) < 0; \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \geq 0$ - рациональные неравенства (линейные и квадратные неравенства также являются рациональными).

Рациональные неравенства бывают целыми (в них нет операции деления на выражение, содержащее переменную), например $2x^5 + 3x^2 + 7x - 5 \geq 0$, и дробно-рациональными (в них есть операция деления на выражение, содержащее переменную), например $\frac{2x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} \geq 2$.

Основным методом решения рациональных неравенств является *метод интервалов*, который базируется на следующей теореме: пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и обращается в нуль в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$

(имеет только n корней), причем $x_1, < x_2 < \cdots x_n$. Тогда на каждом из интервалов $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_n; +\infty)$ функция $f(x)$ сохраняет знак.

При решении рациональных неравенств методом интервалов нужно:

1) все члены неравенства перенести в левую часть; если неравенство дробно-рациональное, то привести левую часть к общему знаменателю;

2) найти все значения переменной, при которых числитель и знаменатель обращаются в 0;

3) нанести найденные точки на числовую прямую, разбивая ее при этом на интервалы, в каждом из которых рациональная функция сохраняет знак;

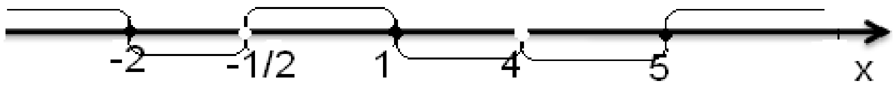
4) определить знак функции на любом из интервалов (лучше крайнем);

5) определить знаки на остальных интервалах: при переходе через точку знак меняется на противоположный, если точка является корнем нечетной степени крайности (т.е. встречается нечетное количество раз среди корней числителя и знаменателя); при переходе через точку четной кратности знак сохраняется;

6) множеством решения неравенства являются объединение интервалов с соответствующим знаком функции. В случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.

Пример 24.1. Решить неравенство $\frac{(x-1)^3(x+2)(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} \leq 0.$

Решение. Функция $f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ является дробно - рациональной и представлена в виде произведения линейных множителей, причем множитель $(x-1)$ повторяется трижды, $(x-4)$ – дважды. Отметим нули числителя и знаменателя на координатной прямой. Неравенство является нестрогим, значит, нули числителя изображаются закрашенными точками, а нули знаменателя – выколотыми. Числа $-2; -\frac{1}{2}; 1; 4; 5$ разбивают координатную прямую на интервалы, в каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак.



$f(x) > 0$ на интервале $[5; +\infty)$.Корень $x = 4$ четной кратности, значит, проходя через эту точку, $f(x)$ знак свой не изменит. Поэтому $f(x) \leq 0$,если $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup [1;4) \cup (4;5)$.

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup [1;4) \cup (4;5)$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решите неравенства.

а) $\frac{(5-2x)(x+3)}{(2x-7)(6-5x)} \geq 0$ б) $\frac{x^2(x-2)(x^2-5x+6)}{(2x+4)(x+1)^3} < 0$ в) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x}$

г) $\sqrt{x+9} > x - 3$д)$\sqrt[3]{x^2-4} \leq 3$

е)$3^{x^2-x-2} < 81$ ж)$4^{x+1} + 2^{2x} \geq 320$з) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \geq 5^x - 5$

и)$\log_{1/3}(x^2 - 2x + 1) \leq 2$к) $\lg(2x - 51) - \lg(22 - x) \geq 2$

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x + 2y \leq 1 \\ x - y \geq -3 \end{cases}$

б) Найдите целочисленные решения $\begin{cases} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1} < 0 \\ x^2 < 36 \end{cases}$

в)$\begin{cases} log_{0,5}x + 2 > 0 \\ 2\sqrt{2x-1} > 1 \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите неравенства.

а) $\frac{(3+4x)(2x+3)}{(2x-4)(6-x)} \leq 0$б) $\frac{x^3(2x-2)(x^2-x-6)}{(2x+4)(x-3)^2} > 0$ в) $\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} < 2$

г) $\sqrt{x+4} \leq x-2$д) $\sqrt[3]{3x^2-27} > 1$

е) $0{,}5^{\sqrt{1-2x}} \geq 0{,}0625$ж) $3^{2x+5} \leq 3^{x+2}+2$з) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1} < 347$

и) $log_3 \log_{1/2}(2x+1) > 0$к) $\log_x(3x-1) - \log_x(x^2+1) > 0$

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 6 \leq 12 \\ 2x \geq x - 4 \end{cases}$

б) Найдите целочисленные решения $\begin{cases} \frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x-18} < 0 \\ \frac{3x-7}{2} > -2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} log_3(x-1) \leq 0 \\ 3x^2-2x < 1 \end{cases}$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какие неравенства называют равносильными?

2 Что означает фраза «решить неравенство»?

3 Какие способы решения неравенств вы знаете?

4 Какой вид может иметь множество решений линейного неравенства?

3.25 Практическая работа № 25
«Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств»

Учебная цель:
выработать навыки владения нестандартными приемами решения рациональных, иррациональных, степенных, показательных, логарифмических уравнений, неравенств и систем неравенств.

Перечень оборудования, аппаратуры, материалов и их характеристики:
тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Порядок выполнения работы:
1 Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2 Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3 Ответьте письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

При решении уравнений и неравенств смешанного типа приходится применять свойства элементарных функций: область определения, область значений, монотонность, ограниченность, четность и нечетность, периодичность.

Ограниченность множества значений функции

Уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases},$$

если для всех $x \in X$ справедливы неравенства $f(x) \le A$ и $g(x) \ge A$.

Монотонность функции

1) Если функция f возрастает (убывает) на множестве X, то уравнение $f(x)=A$ на множестве X имеет не более одного корня.

2) Если функция f возрастает (убывает), а функция g убывает (возрастает) на множестве X, то уравнение f(x)=g(x) на множестве X имеет не более одного корня.

3) Если f(x) монотонно возрастающая функция, то уравнения f(x)= x и f(f(x))=x равносильны.

Периодичность функции

1) Сумма двух функций с соизмеримыми периодами T1 и T2 является функция с периодом НОК(T1,T2).

2) Сумма двух функций с несоизмеримыми периодами является непериодической функцией.

3) Не существует периодических функций, не равных константе, у которой периодами являются несоизмеримые числа.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решите уравнения и неравенства.

а) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$

б) $|\log_3 x-2|<1$

2. При каких значениях параметра k оба корня квадратного уравнения $x^2+kx-1=0$ меньше чем 3?

3. Решите уравнения и неравенства, используя монотонность функций.

а) $3^{-x}=x+4$

б) $12^x+5^x=13^x$

в)$\sqrt{x-4}<6-x$

г)$\log_2 x>3-x$

4. Решите уравнения и неравенства, используя ограниченность множества значений.

а) $2\cos x=3^{-x}+3^x$

б) $\log_3(4-sin3x)\leq cos\frac{12x}{5}$

5. Решите системы уравнений графическим методом, вычислительным методом.

а) $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 36 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите уравнения и неравенства.

а) $|x + 1| + |2x - 5| = 6 - x$

б) $|2^x - 1| + |2^x - 2| \geq 1$

2. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$(k - 2)x^2 - 2(k + 3)x + 4k = 0,$ имеет два корня?

3. Решите уравнения и неравенства, используя монотонность функций.

а) $\log_7(x + 2) = 6 - x$

б) $3^x + 4^x = 7^x$

в) $\sqrt[3]{x - 9} = (x - 3)^3 + 6$

г) $e^x > 1 + x$

4. Решите уравнения и неравенства, используя ограниченность множества значений.

а) $2\sin x = 13^{-x} + 13^x$

б) $\log_3(4 + 6cosx) \leq sin\frac{x}{3}$

5. Решите системы уравнений графическим методом, вычислительным методом.

а) $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 30 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.

2 Решение заданий с указанием ответов.

3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы, предусматривающие краткие ответы по изучаемому содержанию учебного материала:

1 Какие нестандартные методы решения уравнений и неравенств вы знаете?

2 Что называется суперпозицией функций?

3 Что такое параметр?

Список использованных источников (перечень учебной, справочной и специальной литературы)

Основная литература:

1 Башмаков М.И. Математика [Электронный ресурс]: учебник. М.: Кнорус, 2017. 394 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=671393 (договор на предоставление доступа к ЭБС).

2 Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. М.: Издательский центр «Академия», 2016. 256 с.

3 Богомолов Н.В. Практическое занятие по математике: учеб. пособие для СПО. 11-е изд. М.: Издательство Юрайт, 2016. 495 с.

4 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебник для СПО. 5-е изд. М.: Издательство Юрайт, 2015. 396 с.

5 Дадаян А.А. Математика: учебник. 3-е изд. М.: ИНФРА-М, 2018. 544 с.

6 Ячменёв Л.Т. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ[Электронный ресурс]: учебное пособие М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. 336 с. URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=500649 (договор на предоставление доступа к ЭБС).

Дополнительная литература:

1 Башмаков М.И. Математика: задачник: учеб.пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования. 5-е изд. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 416 с.

2 Богомолов Н.В. Математика. Задачи с решениями. В 2 т. Т 1: учеб. пособие для СПО. 2-е изд. М.: Издательство Юрайт, 2016. 364 с. Богомолов Н.В. Математика. Задачи с решениями. В 2 т. Т 2: учеб. пособие для СПО. 2-е изд. М.: Издательство Юрайт, 2016. 285 с.

3 Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: учебник. М.: Альянс, 2018. 576 с.

4 Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.: Издательский центр «Академия», 2018. 368 с.

5 Оакли Барбара. Думай как математик [Электронный ресурс]: как решать любые задачи быстрее и эффективнее. М.: Альпина Паблишер, 2016. 284 с.URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=671393 (договор на предоставление доступа к ЭБС).

Интернет-ресурсы:

1 Варианты тестов по математике для подготовки к ЕГЭ: сайт.URL: https://ege.yandex.ru/mathematics/ (дата обращения: 11.09.2018).

2 Образовательный портал для подготовки к экзаменам: сайт.URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 11.09.2018).

3 Общероссийский математический портал. URL: http://www.mathnet.ru (дата обращения: 11.09.2018).

4 Российского образования: федеральный портал. URL: http://www.edu.ru (дата обращения: 11.09.2018).

5 ЕГЭ 2018 по математике: сайт.URL:http://www.ctege.info/ege-po-matematike/(дата обращения: 11.09.2018).

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

СОГЛАСОВАНО

Старший методист		М.В. Отс
Методист по ИТ		Ю.В. Пеховкина